



Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN TUTELADO**

**SIGNIFICADOS ESCOLARES DE LA NOCIÓN DE  
TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.  
PERFILES Y SINGULARIDADES**

Manuel Estrella Colomo

Granada  
Septiembre 2015





Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

**SIGNIFICADOS ESCOLARES DE LA NOCIÓN DE  
TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.  
PERFILES Y SINGULARIDADES**

Trabajo de investigación tutelado realizado bajo la dirección del doctor D. Luis Rico Romero del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Manuel Estrella Colomo para su aprobación por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Fdo: Manuel Estrella Colomo

V<sup>o</sup>B<sup>o</sup> del Director

Fdo: D. Luis Rico Romero



El presente trabajo de investigación tutelado se ha realizado en el seno del grupo de investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento numérico (FQM-193) de la Universidad de Granada perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.



*A la memoria Angustias, Luis, José Miguel, Luis y Carlos*

*A mis padres, Manolo y Paqui, por ser los mejores profesores en el Máster de la vida*

*A mis hermanas, Marta y Angustias, por estar siempre ahí, aún en la distancia*

*A mi abuela Puri, por su confianza ciega*

*A Rafael y a Diego, mis sobrinos, por su alegría, contagiosa a kilómetros*

*A Irene, por todo, por cada día*

*A mis amigos/as, por su eterno apoyo*

*A todos mis profesores/as, por todo lo que me transmitieron*



## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento al director de este trabajo, por su paciencia, su inestimable saber y su capacidad para mantenerme en el camino a seguir con la mayor dedicación imaginable.

Del mismo modo agradezco al colaborador Dr. Don José Antonio Fernández Plaza sus innumerables consejos y aportaciones en todas y cada una de las reuniones de trabajo.

En tercer lugar me gustaría dar las gracias a todos los miembros del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada por la disponibilidad mostrada durante el estudio.

Para finalizar, también quisiera mostrar mi agradecimiento a los compañeros del Máster de Didáctica de la Matemática, por su ayuda incondicional.

A todos, gracias por hacer que este trabajo se hiciera realidad.



## ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS.....	1
ÍNDICE DE GRÁFICOS.....	2
I.    PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	4
I.1    Introducción.....	4
I.2    Objetivos de investigación.....	7
II.   FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	8
II.1   Antecedentes de la investigación.....	9
II.2   Representaciones.....	12
II.3   Modelos cognitivos de formación de conceptos matemáticos.....	14
II.4   Análisis conceptual de los términos “aproximarse”, “tender”, “alcanzar”, y “límite”.....	19
II.5   Significado de un concepto matemático.....	24
III.  DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.....	26
III.1  Tipo de estudio. Descripción general.....	26
III.2  Sujetos, ciclo y nivel curricular.....	27
III.3  Aplicación del instrumento.....	28
III.4  Fiabilidad/Validez de los resultados.....	28
IV.   ANÁLISIS DE LOS DATOS.....	30
IV.1  Enunciados del cuestionario. Consideraciones generales.....	30
IV.2  Identificación y recuento de términos clave.....	32

IV.3	Caracterización de las variables para análisis de las respuestas. Identificación de singularidades.....	34
IV.4	Estrategia de análisis. El análisis factorial (AF).....	43
IV.5	AF de pares de actividades.....	46
IV.6	AF de actividades de preguntas individuales.....	55
IV.7	Descripción de singularidades.....	59
IV.8	Descripción de perfiles.....	66
V. CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN.....		72
V.1	Conclusiones referentes a los perfiles.....	74
V.2	Conclusiones referentes a las singularidades.....	76
V.3	Limitaciones de la investigación.....	78
V.4	Sugerencias para investigaciones futuras.....	78
ANEXOS.....		79
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		133

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.1 *Unidades de información extraídas de las respuestas a cuestiones de forma individual...32*

Tabla 4.2 *Unidades de información extraídas de las respuestas a pares de cuestiones...33*

Tabla 4.3 *Sistemas de representación usados por cada alumno...34*

Tabla 4.4 *Alumnos que usan los distintos sistemas de representación según el número de variables y si la aproximación es doble o simple...40*

Tabla 4.5 *Número de componentes con puntuación factorial positiva de cada alumno...68*

Tabla 4.6 *Número de alumnos con puntuación factorial positiva por componente...69*

Tabla 4.7 *Clasificación de alumnos según su perfil principal y secundario...71*

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Figura 2.1	<i>Significado de un concepto matemático</i>	24
Figura 4.1	<i>Respuesta del alumno 11 a la cuestión 1</i>	35
Figura 4.2	<i>Respuesta del alumno 5 a la cuestión 1</i>	35
Figura 4.3	<i>Respuesta del alumno 3 a la cuestión 3</i>	35
Figura 4.4	<i>Respuesta del alumno 5 a la cuestión 3</i>	36
Figura 4.5	<i>Respuesta del alumno 21 a la cuestión 1</i>	37
Figura 4.6	<i>Respuesta del alumno 23 a la cuestión 1</i>	37
Figura 4.7	<i>Respuesta del alumno 26 a la cuestión 1</i>	38
Figura 4.8	<i>Respuesta del alumno 19 a la cuestión 3</i>	38
Figura 4.9	<i>Respuesta del alumno 6 a la cuestión 2</i>	39
Figura 4.10	<i>Respuesta del alumno 5 a la cuestión 2</i>	39
Figura 4.11	<i>Respuesta del alumno 12 a la cuestión 2</i>	40
Figura 4.12	<i>Respuesta del alumno 24 a la cuestión 1</i>	47
Figura 4.13	<i>Respuesta del alumno 24 a la cuestión 2</i>	48
Figura 4.14	<i>Respuesta del alumno 12 a la cuestión 1</i>	48
Figura 4.15	<i>Respuesta del alumno 7 a la cuestión 1</i>	49
Figura 4.16	<i>Respuesta del alumno 16 a las cuestiones 1 y 2</i>	49
Figura 4.17	<i>Respuesta del alumno 7 a la cuestión 2</i>	50
Figura 4.18	<i>Respuesta del alumno 12 a la cuestión 2</i>	50
Figura 4.19	<i>Respuestas del alumno 4 a las cuestiones 1 y 3</i>	51
Figura 4.20	<i>Respuesta del alumno 18 a la cuestión 1</i>	52
Figura 4.21	<i>Respuesta del alumno 18 a la cuestión 3</i>	52
Figura 4.22	<i>Respuesta del alumno 12 a la cuestión 1</i>	52
Figura 4.23	<i>Respuesta del alumno 12 a la cuestión 3</i>	53
Figura 4.24	<i>Respuestas del alumno 7 a las cuestiones 2 y 4</i>	54
Figura 4.25	<i>Respuesta del alumno 12 a la cuestión 2</i>	54
Figura 4.26	<i>Respuesta del alumno 12 a la cuestión 4</i>	54
Figura 4.27	<i>Respuestas del alumno 20 a las cuestiones 2 y 4</i>	55
Figura 4.28	<i>Respuesta del alumno 4 a la cuestión 1</i>	56
Figura 4.29	<i>Respuesta del alumno 10 a la cuestión 1</i>	56
Figura 4.30	<i>Respuesta del alumno 12 a la cuestión 1</i>	57

- Figura 4.31 *Respuesta del alumno 9 a la cuestión 2...58*
- Figura 4.32 *Respuesta del alumno 16 a la cuestión 2...58*
- Figura 4.33 *Respuesta del alumno 4 a la cuestión 2...60*
- Figura 4.34 *Respuesta del alumno 5 a la cuestión 2...61*
- Figura 4.35 *Respuesta del alumno 6 a la cuestión 2...61*
- Figura 4.36 *Respuesta del alumno 17 a la cuestión 2...61*
- Figura 4.37 *Respuesta del alumno 7 a la cuestión 2...62*
- Figura 4.38 *Respuesta del alumno 17 a la cuestión 2...62*
- Figura 4.39 *Respuesta del alumno 18 a la cuestión 2...63*
- Figura 4.40 *Respuesta del alumno 22 a la cuestión 2...63*
- Figura 4.41 *Respuesta del alumno 1 a la cuestión 2...64*
- Figura 4.42 *Respuesta del alumno 22 a la cuestión 2...64*
- Figura 4.43 *Respuesta del alumno 1 a la cuestión 4...65*
- Figura 4.44 *Respuesta del alumno 7 a la cuestión 4...65*
- Figura 4.45 *Respuesta del alumno 8 a la cuestión 4...66*
- Figura 4.46 *Gráfico radial con marcas de los alumnos 4 y 23...66*
- Figura 4.47 *Respuestas de los alumnos 4 y 23 a las cuestiones 2 y 4...67*
- Figura 5.1 *Respuesta del alumno 18 a la cuestión 1...75*
- Figura 5.2 *Respuesta del alumno 18 a la cuestión 2...75*
- Figura 5.3 *Representación simbólica de tendencia de una variable más usada por los alumnos...76*
- Figura 5.4 *Respuesta del alumno 7 a la cuestión 2...76*
- Figura 5.5 *Respuesta del alumno 17 a la cuestión 2...77*
- Figura 5.6 *Respuesta del alumno 22 a la cuestión 2...77*

## I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

### I.1 Introducción

En Didáctica de la Matemática se tiende a considerar la problemática del aprendizaje de las matemáticas escolares mediante procesos cognitivos complejos, en lugar de simplificarlo comprobando la memorización de conceptos y adquisición de destrezas y habilidades. En las últimas décadas se aprecia una evolución que ha ido desde el estudio de errores y dificultades de los alumnos hacia investigaciones más recientes centradas en los significados que los estudiantes atribuyen a sus conocimientos, origen de estas dificultades.

En 1985, en el *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), se constituye un grupo de trabajo con el objetivo de estudiar el origen y evolución del pensamiento matemático avanzado. Concretamente, este grupo se centra en investigar desde un punto de vista cognitivo los procesos de enseñanza y aprendizaje en relación al cálculo infinitesimal.

Dreyfus (1991) caracteriza “comprender” como proceso que realiza el estudiante, que incluye una extensa secuencia de actividades de aprendizaje a lo largo de las cuales tienen lugar gran cantidad de procesos. Dentro de estos procesos, implicados en el pensamiento matemático avanzado destaca la abstracción. Estos investigadores inciden en que la abstracción no es peculiar de las matemáticas superiores, y tampoco lo son otros procesos matemáticos como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar o formalizar. Aparte de la abstracción, entre los procesos cognitivos del aprendizaje de las matemáticas enumeran los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

En 1992 en Quebec, el grupo de trabajo del ICME 7 “*Las dificultades de los estudiantes en el Cálculo*” trató de resolver algunas cuestiones sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo matemático, cuestiones que fueron agrupadas en 3 temas principales: objetivos y contenidos; dificultades de enseñanza y aprendizaje; y concepciones sobre el Cálculo y su enseñanza que subyacen en las distintas experiencias. Muchas cuestiones

sobre estos temas siguen abiertas y constituyen, hoy día, preguntas de investigación en Didáctica del Análisis.

Distintos autores han venido señalando un conjunto de dificultades para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático, entre los que destacan el concepto de límite y los procesos infinitos que intervienen en los conceptos básicos de derivada e integral. Además, indican otro tipo de dificultades que tienen que ver con el estudio de las funciones, la notación de Leibniz, el concepto de infinito, el uso y selección de las distintas representaciones, y otros varios.

Así, dentro de las investigaciones sobre pensamiento matemático avanzado, el concepto de límite, junto con las nociones de infinito y continuidad de una función, son contenidos prioritarios. En concreto, los conflictos y dificultades alrededor del concepto de límite finito de una función en un punto han sido puestos de manifiesto por diferentes investigadores fuera de nuestras fronteras (Tall y Vinner, 1981; Monaghan, 1991; Cornu, 1991; Tall, 1992; Juter, 2007a, 2007b).

Davis y Vinner (1986) describen una serie de fuentes de error sobre el concepto de límite de una secuencia, que pueden ser extensibles a las nociones de límite finito de una función en un punto o la de límite en el infinito. Dentro de estas interpretaciones, la influencia del lenguaje ocupa un lugar destacado, ya que la mayor parte de los términos matemáticos utilizados en el lenguaje del cálculo carecen de especificidad, lo cual provoca la aparición de conflictos entre las concepciones espontáneas con que los estudiantes interpretan estas nociones (Cornu, 1991; Davis y Vinner, 1986).

En nuestro país, en 1996, dentro del seno de la SEIEM, surge el grupo de Didáctica del Análisis Matemático. Desde la Universidad de Valladolid, Blázquez (1999), diseña una propuesta didáctica en la que aparece una definición de límite alternativa a la formal y que la autora cataloga como definición funcional de límite. Esta propuesta se implementa y evalúa con el fin de facilitar a los alumnos la superación de las limitaciones de aprendizaje asociadas al concepto de límite.

Desde la Universidad de Granada, Fernández-Plaza, Rico y Ruiz-Hidalgo vienen desarrollando en estos últimos años trabajos de investigación acerca del concepto de

límite finito de una función en un punto. Desde el acercamiento a la temática con trabajos de tercer ciclo como el que ahora presentamos, hasta culminar con la tesis doctoral de Fernández-Plaza (2015). Este grupo ha estudiado el concepto de límite, los términos relacionados y su significado así como las concepciones de alumnos de bachillerato acerca del mismo.

En esta línea se sitúa este proyecto de investigación que se inició en el Máster de Formación de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato, con el trabajo de fin de máster titulado *Límite finito de una función en un punto. Continuidad*, consistente en el diseño de una unidad didáctica sobre el concepto de límite finito de una función en un punto en el curso 2012-2013.

El presente estudio tiene como fin obtener información sobre las concepciones de los escolares de secundaria post-obligatoria y estudiar sus singularidades, relativas a las nociones de convergencia de una variable hacia un valor y de una función en un punto.

Se trata de un estudio cualitativo y descriptivo, que sigue un método de encuesta. Es un estudio semántico y se lleva a cabo mediante un cuestionario de respuesta abierta. Aborda el modo en que los estudiantes entienden, utilizan e interpretan determinadas nociones y conceptos. (Cohen, Manion y Morrison, 2011; Blok, 2014)

Su finalidad es práctica; forma parte de una línea de investigación aplicada, para obtener información con la que proceder al diseño de propuestas curriculares de innovación para el aprendizaje de los conceptos básicos del cálculo por los escolares de la educación secundaria post-obligatoria.

El instrumento para la recogida de datos es un cuestionario cuyos enunciados surgen de estudios previos. Su formato está dirigido a que se responda por escrito, modalidad que se considera más útil para recoger juicios robustos de una diversidad de sujetos (Blok, 2014).

## **I.2 Objetivos de investigación**

El objetivo general de la investigación es el siguiente:

“Detectar y describir perfiles y singularidades a partir del análisis de las respuestas de alumnos de bachillerato a cuestiones relativas a la noción de tendencia, asociadas al concepto de límite finito de una función en un punto”

Este objetivo general se puede desglosar en una serie de objetivos específicos tales como:

- Identificar los términos claves que aparecen en las definiciones verbales de los alumnos sobre tendencia de una variable y de una función, así como los distintos sistemas usados al representar dicha noción de tendencia.
- Definir las variables de estudio teniendo en cuenta los términos identificados en las respuestas de los alumnos y la revisión de la literatura precedente.
- A partir de dichas variables, y llevando a cabo una serie de análisis factoriales mediante el programa SPSS, extraer componentes que reduzcan el número de dimensiones generado por las variables de estudio.
- Detectar y describir perfiles y singularidades en las respuestas de los alumnos.

## II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este capítulo se incluye la fundamentación teórica a partir de una serie de ideas que conforman el núcleo de la investigación. Comenzamos con una revisión y síntesis no exhaustiva de los antecedentes del presente estudio. Revisamos resultados que consideramos relevantes acerca de las concepciones, conflictos cognitivos e, incluso, propuestas de definición alternativas a la definición formal, siempre en relación con el concepto de límite finito de una función en un punto. Además, también incorporamos resultados destacados en relación a la noción de tendencia. En segundo lugar, ya que aparece en dos ítems del cuestionario, nos centramos en la noción de representación desde el punto de vista de las investigaciones en educación matemática. En tercer lugar, revisamos de forma más detallada trabajos acerca de la formalización de conceptos matemáticos, particularizando en las características cognitivas propias de los conceptos de límite, continuidad y de la noción de tendencia. En cuarto lugar, desarrollamos el análisis conceptual de términos como “aproximar”, “tender”, “alcanzar” y “límite”, resaltando los posibles conflictos que pueden generar las distintas acepciones adoptadas en la vida cotidiana de los alumnos y en el contexto del cálculo. Por último, concretamos la noción de significado de un concepto matemático que usaremos a lo largo del trabajo.

## II.1 Antecedentes de la investigación

Las investigaciones sobre Pensamiento Matemático Avanzado (del inglés “*Advanced Mathematical Thinking*”) tienen su punto de partida, como comentamos en el primer epígrafe, en 1985 en el seno del PME, grupo de trabajo que profundiza los estudios cognitivos en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje alrededor del cálculo infinitesimal.

A pesar de que numerosos investigadores han puesto de manifiesto que la expresión admite distintas interpretaciones, existe consenso sobre la dificultad de acotar la transición entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado (Tall, 1992; Azcárate, Camacho y Sierra, 1999; Edwards, Bárbara, Dubinsky y Mc Donald, 2005; Zaskis y Applebaum, 2007).

Azcárate y Camacho (2003), exponen las principales características del Pensamiento Matemático Avanzado comenzando por los procesos propios del mismo, divididos en procesos cognitivos de raíz matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar o formalizar; y procesos cognitivos de raíz psicológica como abstraer, representar, conceptualizar, inducir y visualizar. De todos ellos, abstraer, definir, demostrar y formalizar, son los que adquieren mayor importancia en los cursos superiores.

Según los autores, para investigar estos procesos cognitivos implicados en el Análisis Matemático, se usan una serie de modelos denominados cognitivos que serán tratados con mayor profundidad en el epígrafe II. 3. Además, señalan una forma de establecer la distinción entre las matemáticas elementales y las avanzadas: “en las primeras, los objetos se describen, mientras en las segundas, se definen”. Por último destacan los aportes de la Didáctica del Análisis Matemático al desarrollo curricular y una experiencia española de investigación en Didáctica del Análisis Matemático, que trata de profundizar sobre los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las Matemáticas; sobre el estudio histórico y epistemológico de los contenidos matemáticos, en especial de los relacionados con el Análisis; y sobre el papel que juegan las nuevas tecnologías (PCs y calculadoras gráficas y simbólicas) en la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos.

Centrándonos en las investigaciones relacionadas con el concepto de límite, hemos llevado a cabo la siguiente clasificación:

- Sobre conflictos cognitivos:
  - Tall y Schwarzenberger (1978) comienzan con la siguiente cuestión: “¿Es 0.9999... igual que 1, o menor que 1?” y desarrollan a partir de los conceptos que aparecen en las respuestas de los alumnos las ideas de conflictos conscientes y del subconsciente. En relación con el concepto de límite hablan de series y sucesiones y destacan la influencia del lenguaje coloquial en torno a términos como el de “límite”, en algunos de los conflictos que se les presentan a los alumnos.
  - Tall y Vinner (1981) diferencian entre la imagen conceptual y la definición conceptual. La primera incluye las imágenes mentales asociadas, así como las propiedades y procesos relacionados. Dentro del segundo contemplan a su vez dos posibilidades: la definición personal, o términos usados o evocados por el sujeto para describir la imagen conceptual; y la definición formal, que es la aceptada por la comunidad matemática.
  - Lauten, Graham, Ferrini-Mundi (1994) se basan en los estudios de Vinner y Tall (1981) para idear una serie de entrevistas clínicas relacionadas con la comprensión y las imágenes conceptuales referentes a los conceptos de límite y función. En particular, evalúan la influencia del uso de la calculadora gráfica en el aprendizaje de dichos conceptos.
  - Vrancken et al. (2006) estudian las dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Clasifican los obstáculos por su origen entre: obstáculos ontogénicos (los que sobrevienen de las limitaciones del sujeto), obstáculos de origen didáctico (provocados por el sistema de enseñanza) y obstáculos de origen epistemológico (derivados del rol constitutivo del saber mismo).

- Sobre el lenguaje y las concepciones intuitivas:
  - Cornu (1983) destaca que en el caso del concepto de límite, los alumnos tienen ideas preconcebidas, intuiciones o conocimientos previos que pueden provocar conflictos. Entre ellas se encuentran los significados coloquiales de los términos relacionados con el concepto (tender a, límite, aproximarse, alcanzar y otros).
  - Vinner (1983) sobre el concepto de función, se centra en las imágenes conceptuales de un grupo de alumnos. A partir de ellas identifica 4 categorías de definiciones personales que caracterizarán las imágenes conceptuales principales.
  - Vinner y Dreyfus (1989) refinan las categorías anteriormente descritas por Vinner (1983).
  - Monaghan (1991), basándose en un trabajo más amplio (Monaghan 1986), estudia la influencia del lenguaje acerca de términos relacionados con el concepto de límite como “tender a”, “aproximarse”, “converger a” y “límite”.
  - Swinyard (2011) estudia cómo los alumnos pueden ir construyendo la definición formal del concepto de límite a partir de una serie de cuestiones planteadas por el investigador.
  - Fernández-Plaza, Castro, Rico, y Ruiz-Hidalgo (2012) describen e interpretan las concepciones personales puestas de manifiesto por un grupo de estudiantes de bachillerato en relación al límite finito de una función en un punto. Para ello, se basan en una serie de aspectos estructurales sintetizados a partir de investigaciones previas: la interpretación como objeto o como proceso de la noción de límite, su carácter exacto o aproximado, su consideración como proceso potencialmente infinito o finito en la práctica, su alcanzabilidad y su rebasabilidad.

- Sobre definiciones de límite alternativas a la formal:
  - Bokhari y Yushau (2006) proponen una definición alternativa a la definición formal del concepto de límite que denominan “Local (L, e)-aproximación de una función de una variable ”. Además incluyen una serie de actividades sobre dicha definición.
  - Blázquez, Gatica y Ortega (2009) introducen una definición alternativa en la que presentan una fuerte distinción semántica entre los términos “aproximarse” y “tender a”. Incluyen en su estudio un análisis comparativo de diferentes conceptualizaciones de límite funcional que aparecen en manuales de Análisis Matemático.
  
- Sobre fenómenos asociados al concepto de límite:
  - Claros (2010) analiza la presencia de fenómenos matemáticos relacionados con el concepto de límite finito de una sucesión a partir de las definiciones intuitiva y formal que aparecen en libros de texto y otras producciones escolares desde 1933 hasta 2005.

## **II.2 Representaciones**

El término representación se viene empleando desde la década de los 80 en Educación Matemática. Según Rico (2000), entre los autores de esta época se propusieron variantes alternativas a la noción de representación, pero no equivalentes, como “símbolos” (Skemp, 1980), “sistema matemático de signos” (Kieran y Filloy, 1989), “sistemas de notación” (Kaput, 1992) o “sistema de registros semióticos” (Duval, 1993) (citados por Rico, 2000). Sin embargo la comunidad se decantó por el término representaciones.

En un sentido general, las representaciones en matemáticas se han entendido desde entonces como notaciones y expresiones que ponen de manifiesto los distintos conceptos y procedimientos matemáticos. Se trata de una serie de signos y gráficos mediante los cuales los sujetos interactúan con el conocimiento matemático, piensan y comunican sobre el mismo. Sin ánimo de ser exhaustivos vamos a destacar dos

definiciones de representación que nos parecen de utilidad en el desarrollo del presente estudio:

- Kaput (1987) contempla una dualidad entre el objeto representante y el objeto representado. Estas son dos entidades relacionadas pero separadas desde el punto de vista funcional. Además queda implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados.
- Castro y Castro (1997) consideran las representaciones como:  
*“notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes”.*

Un concepto o procedimiento matemático permite ser representado por conjuntos de símbolos, gráficos y reglas que tienen carácter sistémico. Así pues hablaremos de “sistemas de representación”.

Según Castro y Castro (1997), para dominar un concepto matemático, es necesario *“conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades”.*

Blázquez y Ortega (2001) consideran clave el uso de 4 sistemas de representación en la enseñanza del límite: algebraico (o simbólico), numérico (o tabular), gráfico y verbal. En el cuestionario incluido en este estudio (Anexo 0) aparecen dos cuestiones, la 1 y la 3, en las que se espera que las respuestas de los alumnos se enmarquen dentro del sistema de representación verbal eminentemente. En las otras dos cuestiones, 2 y 4, esperamos que los sujetos utilicen mayoritariamente los sistemas de representación gráfico, tabular y simbólico.

Según (, 1995) la comprensión del concepto se caracteriza por una serie de procesos relacionados con los sistemas de representación: *Formación de representaciones*

*identificables en un sistema dado, Transformación dentro de un sistema de representación, Traducción entre sistemas de representación, Cristalización y Modelización.* Dentro de estos 5 procesos, los autores coinciden en destacar la traducción entre sistemas de representación como una de las debilidades de los estudiantes. Respondiendo a los ítems del cuestionario (Anexo 0), los sujetos se van a enfrentar a este proceso de traducción entre sistemas de representación en dos ocasiones: entre las cuestiones 1 y 2 respecto a la tendencia de una variable; y entre las cuestiones 3 y 4, respecto a la tendencia de una función.

### **II.3 Modelos cognitivos de formación de conceptos matemáticos**

Comenzaremos este punto con la definición de “concepción” dada por Cubero en 1996:

*“Conjunto de conocimientos que dispone el niño que le sirve en todo momento para dar sentido al mundo en el que vive y para interpretar y predecir al experiencia”*

Interpretamos que la concepción viene de la mano del conocimiento posterior a la instrucción. Las creencias (Da Ponte, 1999), por su parte, se presentan más ligadas a las intuiciones.

En la formación de conceptos matemáticos vamos a distinguir dos modelos: el primero introducido por Vinner y el segundo por Dubinsky, Cottrill, Schwingendorf, Thomas, Nichols y Vidakovic.

- Imagen conceptual y definición conceptual

Estos dos términos son introducidos por Tall y Vinner (1981) y mejorados por Vinner (1983). En primer lugar define el *dibujo mental* de un concepto (*mental picture*) como el conjunto de todas las representaciones visuales mentales del mismo. Estas representaciones pueden ser pictóricas, simbólicas o gráficas. Define *imagen conceptual* (*conceptual image*) como el conjunto de los dibujos mentales asociados al concepto y de las propiedades asignadas por el sujeto de forma mental a cada dibujo. Por último,

llama definición conceptual (*conceptual definition*) a cualquier explicación verbal del concepto, pero de forma precisa.

Para Vinner existen dos celdas diferenciadas en la estructura cognitiva: una para la definición del concepto y otra para la imagen conceptual. Entre ambas se pueden dar interacciones aunque se hayan originado de forma independiente. Incluso una o ambas celdas pueden estar vacías. En el caso de que un concepto sea introducido por primera vez mediante una definición, la celda de la imagen conceptual permanecerá vacía hasta que se proporcionen ejemplos al alumno. Vinner y Tall (1981) conjeturan que, por lo general, la imagen conceptual no recogerá todas las características de la definición.

- *APOS y descomposición genética de conceptos*

En primer lugar, Dubinsky (1991) define la *descomposición genética de un concepto* como el proceso que lleva a un sujeto a construcciones sucesivas que lo encaminan a la comprensión de un concepto. Estas construcciones no se diferenciarían mucho de las teóricas pero no existe una descomposición genética única, válida para todos los estudiantes.

En segundo lugar, las siglas APOS pertenecen a 3 tipos de conocimientos matemáticos generales: las acciones (*actions*), los procesos (*processes*) y los objetos (*objects*) que a la postre vienen organizadas en estructuras llamadas esquemas (*schemas*). Este modelo es ideado por Cottrill, Dubinsky, Schwingendorf, Thomas, Nichols y Vidakovic (1996).

Según ellos una *acción* es una transformación física o mental de objetos que originan otros objetos. Una vez que el sujeto controla la acción, ésta puede ser interiorizada pasando a ser un proceso.

Un *proceso* es una transformación realizada sobre un objeto teniendo en cuenta que el individuo es capaz de controlarla, es decir, es capaz de describir la transformación sin necesidad de llevarla a cabo. Cuando un sujeto construye un proceso, este se puede coordinar con otros o invertir para dar lugar a otros procesos.

Un *objeto* será el resultado de la *encapsulación* de un proceso. Para llegar a encapsular un proceso, el individuo ha de ser consciente de la totalidad del proceso, incluyendo la detección y la construcción de las transformaciones que actúan sobre el proceso. La encapsulación puede revertirse.

Por último, un esquema es una colección coherente de acciones, procesos y objetos. Ahora bien, los esquemas también pueden ser encapsulados, convirtiéndose en objetos de un nuevo esquema más amplio.

Los dos modelos anteriormente comentados, imagen y definición conceptual y APOS, serán importantes a la hora de interpretar las concepciones de los alumnos en base a las respuestas que dan a los ítems del cuestionario. Sin embargo, el concepto de límite y por ende la noción de tendencia asociada a dicho concepto, tienen unas características cognitivas propias y muy particulares que han sido objeto de estudio por distintos autores:

- Tall (1980), habla de procesos infinitos continuos, como el límite de una función en un punto o la noción de continuidad, que se basan en la idea de lo continuo frente a lo discreto; y de procesos infinitos discretos, como los límites de secuencias y series, las expansiones decimales o la aproximación de áreas en geometría. Según el modelo desarrollado por él mismo y por Vinner, al transmitir a los estudiantes una definición informal del límite previa a la formal, la imagen conceptual se contamina con propiedades que no proceden de la definición formal dada. Además, según el mismo autor, la mayoría de los alumnos conciben el límite como proceso dinámico en vez de cómo una cantidad numérica.
- Cornu (1983) menciona que el proceso de cálculo de límite provoca en los alumnos conflicto importante, ya que al no ser explícito, no acompaña a las intuiciones estudiantiles basadas en experiencias previas con los algoritmos aritméticos y algebraicos, que sí son explícitos.
- Cottrill et al. (1996) enumeran errores comunes que estudios empíricos anteriores han detectado en los estudiantes en relación al concepto de límite: percepción del límite como algo inalcanzable, percepción del límite como una

cota, y percepción del límite como algo que sólo se puede aproximar monótonamente. Según el modelo APOS, estos autores llevan a cabo la siguiente descomposición genética del concepto de límite de una función:

- *“La acción de evaluar  $f$  en un sólo punto  $x$  que es considerado estar cerca de, o incluso igual a  $a$ .*
  - *La acción de evaluar  $f$  en unos pocos puntos, cada punto sucesivamente más cerca de  $a$  que el anterior.*
  - *Construcción de un esquema coordinado como sigue:*
    - a) *Interiorización de la acción del segundo paso para construir el “proceso en dominio” en el que  $x$  se aproxima a  $a$ .*
    - b) *Construcción del “proceso en recorrido o rango” en el que  $y$  se aproxima a  $L$ .*
    - c) *Coordinación de los pasos (a) y (b) vía  $f$ . Es decir, la función  $f$  aplicada al proceso de  $x$  aproximándose a  $a$  para obtener el proceso de  $f(x)$  aproximándose a  $L$ .*
  - *Realizar acciones sobre el concepto de límite hablando, por ejemplo, sobre los límites de combinaciones de funciones. De esta manera, el esquema del tercer paso es encapsulado para convertirse en un objeto.*
  - *Reconstruir los procesos del apartado c) del tercer paso en términos de intervalos y desigualdades.*

*Esto es hecho introduciendo estimaciones numéricas de la cercanía de la aproximación, en símbolos,  $0 < |x-a| < \delta$  y  $|f(x)-L| < \epsilon$ .*
  - *Aplicar el esquema de cuantificación para conectar el proceso del paso anterior para obtener la definición formal de límite.*
  - *Una definición completa épsilon-delta aplicada a situaciones específicas.” (Cottrill et al., 1996)*
- Fernández-Plaza, Rico, Ruiz-Hidalgo y Castro (2013) describen e interpretan las definiciones aportadas por una muestra de estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. A partir de otras investigaciones sintetizan los aspectos estructurales (características, propiedades, nociones, términos y otros, documentados en la literatura) relacionados con el concepto de límite que van a usar en el estudio:

### *Aspecto estructural objeto/proceso*

Este aspecto identifica las consideraciones generales realizadas por los estudiantes sobre el concepto de límite como objeto, como proceso o bien, una interpretación dual (Cottrill et al., 1996; Sfard, 1991; Tall, 1980). Dentro de este aspecto estructural consideramos distintas variantes no excluyentes entre sí, que presentamos a continuación.

- *“Tipo de objeto/proceso (OP). Se reconoce cuando los estudiantes establecen distintas referencias para el objeto límite (lugar del plano, conjunto de puntos, recta, etc.); en algunos casos, se destaca también su dualidad procesual (aproximación).*
- *Vinculación entre límite e imagen (LI). Cuando el escolar asigna al límite un valor de imagen se observa una Identificación (de manera general), una Conexión (en casos particulares) o bien una Independencia entre dicho límite y el valor imagen de la función (Blázquez y Ortega, 1998).*
- *Descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc). Los escolares sólo se refieren a la variable  $x$  (Blázquez y Ortega).*
- *Referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico (SR)...*
- *Aspecto estructural destrezas prácticas de cálculo. Este aspecto está relacionado con los modos que tienen los escolares de interpretar los procesos infinitos formales mediante técnicas finitas de determinación del valor del límite, basadas en la continuidad y en las propiedades algebraicas del concepto de límite. Entre esas tres técnicas destacamos las siguientes:*
  - *Evaluación en el punto (sustitución directa) (Eval.). No necesariamente implica la vinculación entre límite e imagen.*
  - *Tabla de valores (TVal.). Los escolares expresan acciones similares a “dar valores a  $x$ ”.*
  - *Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC). Los escolares expresan que los procesos de cálculo del límite, bien*

*por la izquierda o bien por la derecha, deben dar el mismo resultado.*

- *Aspectos estructurales alcanzabilidad y rebasabilidad (Alcanz. y Reb.) La posibilidad o no de alcanzar o rebasar el límite puede ser expresada por los escolares en sus definiciones (Cornu, 1991; Monaghan, 1991).*
- *Reproducción de la definición de referencia (Ref.) También hay que tener en cuenta aquellas definiciones que reproducen la dada bien por el profesor o por el libro de texto y no tienen otros elementos característicos.”(Fernández-Plaza et al. 2013)*

#### **II.4 Análisis conceptual de los términos “aproximarse”, “tender”, “alcanzar”, y “límite”**

Lo que pretendemos con este análisis conceptual es poner de manifiesto el uso matemático de los términos en contraste con sus significados en el lenguaje no matemático (Rico, 2001). Además nos será de gran utilidad a la hora de interpretar las concepciones de los alumnos.

En primer lugar hemos de destacar que los términos elegidos aparecen en la literatura revisada (epígrafes II.1 y II.3), tanto en la definiciones formal y alternativas del concepto de límite, como en el estudio de errores y dificultades que se plantean a los estudiantes. Resaltamos el hecho de que en las definiciones verbales de los alumnos (preguntas 1 y 3) no hemos encontrado referencias directas ni indirectas del término “rebasar”. Este término aparece en trabajos previos revisados en torno al concepto de límite (Cornu, 1991; Monaghan, 1991; Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, y Rico, 2013) pero no ha aparecido en las respuestas al cuestionario sobre la noción de tendencia que hemos implementado en el presente trabajo (Anexo 0).

En segundo lugar, “tender a” aparece en los enunciados de las tareas del cuestionario. En tercer lugar estos 4 términos, junto con algunos sinónimos, están presentes en numerosas respuestas de los alumnos. En cuarto lugar, estos análisis conceptuales proporcionan el marco interpretativo que necesitamos a la hora de concretar los términos y acepciones que son puestos de manifiesto por los individuos de nuestro estudio.

Una vez justificada la elección de los términos, a continuación incluimos sus diferentes acepciones:

- Aproximar:

Del diccionario de la lengua española (obra de referencia de la RAE) en su 22ª edición con enmiendas hasta el 2012 (RAE, 2001), conseguimos las siguientes acepciones del término aproximar:

“1. tr. Arrimar, acercar. U. t. c. prnl.

2. tr. Obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado. U. t. c. prnl.”

Por su parte, el diccionario de uso del español de María Moliner (1998) nos proporciona estos resultados:

“1. tr. y prnl. Estar cerca o estar cada vez más cerca una fecha o un acontecimiento. Faltarle a alguien poco para cierta edad [sinónimo “parecerse”]”

En ambos casos, DRAE y María Moliner, las acepciones encontradas no son específicamente matemáticas aunque la segunda acepción del DRAE es similar a la usada en el contexto matemático.

Debido a la proliferación de literatura revisada en inglés, a continuación incluimos las acepciones del diccionario online Oxford (Oxford University Press, 2015) para el término “to approach”:

“Come near or nearer to (someone or something) in distance or time... Come close to (a number, level, or standard) in quality or quantity [*acercarse o acercarse más a alguien o algo en distancia o tiempo. . . Acercarse a (un número, nivel o estándar) en calidad o cantidad*]”

- Tender a:

En el DRAE encontramos una acepción propiamente matemática que incluye otro de los términos a analizar:

“11. tr. Mat. Dicho de una variable o de una función: Aproximarse progresivamente a un valor determinado, sin llegar nunca a alcanzarlo.”

Otras acepciones del término en el DRAE son:

“6. tr. Alargar algo aproximándolo hacia alguien o hacia otra cosa.

8. tr. Dicho de una persona o de una cosa: Tener una cualidad o característica no bien definida, pero sí aproximada a otra de la misma naturaleza.”

El diccionario de María Moliner también otorga un significado parecido al DRAE del verbo “tender” propio del contexto matemático:

“. . . Mat. Aproximarse una variable o función a un valor determinado sin llegar nunca a alcanzarlo.”

En inglés el verbo equivalente sería “to tend” y el Oxford online (2015) distingue también una acepción matemática:

“(Tend to) Mathematics (of a variable) approach a given quantity as a limit [(Tender a) Matemáticas (de una variable) aproximarse a una cantidad dada como un límite]”

Para completar el análisis conceptual de este término creemos conveniente adjuntar las acepciones que el diccionario de la RAE adjudica al término “converger” (o “convergir”) que consideramos sinónimo a lo largo de este trabajo:

“1. intr. Dicho de dos o más líneas: Dirigirse a unirse en un punto.

2. intr. Dicho de los dictámenes, opiniones o ideas de dos o más personas: Concurrir al mismo fin.

3. intr. *Mat.* Dicho de una sucesión: Aproximarse a un límite.”

- Alcanzar:

En el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE) hallamos las siguientes acepciones:

“1. tr. Llegar a juntarse con alguien o algo que va delante.

2. tr. Llegar a tocar, golpear o herir a alguien o algo...

3. tr. Coger algo alargando la mano para tomarlo.

4. tr. Llegar a percibir con la vista, el oído o el olfato...

7. tr. Llegar a poseer lo que se busca o solicita...

9. tr. Saber, entender, comprender.

11. tr. Llegar a igualarse con alguien en algo...
12. tr. ant. Perseguir al enemigo.
13. intr. Llegar hasta cierto punto o término.
14. intr. Dicho de un tiro de arma arrojadiza o de fuego: Llegar a cierto término o distancia.
15. intr. Dicho de una cosa o de parte de ella: Tocar o corresponder a alguien.
16. intr. Dicho de una cosa: Ser suficiente o bastante para algún fin...
17. prnl. Llegar a tocarse o juntarse.”

En el diccionario de María Moliner encontramos:

“1 tr. Llegar al punto en que está algo o alguien que va delante en una marcha o progreso hacia cierta cosa. Poder tocar o coger cierta cosa a la distancia o altura a que está.// 2 Coger algo que está a cierta distancia, particularmente para \*darlo a otra persona.\*Alargar.”

Las acepciones que proporciona el diccionario Oxford en inglés para el término que consideramos equivalente, “to reach”, son:

“1 (no object, with adverbial of direction) stretch out an arm in a specified direction in order to touch or grasp something. [(no objeto, con adverbio de dirección). Extender un brazo en una dirección específica para tocar o agarrar algo]// 2 (with object) arrive at; get as far as[Traducción: (con objeto) Llegar a ; llegar tan lejos como]”

Los tres diccionarios coinciden en que “alcanzar” es llegar a o llegar a tocar algo.

- Límite:

En el DRAE encontramos:

- “1. m. Línea real o imaginaria que separa dos terrenos, dos países, dos territorios.
2. m. Fin, término ...
3. m. Extremo a que llega un determinado tiempo ...
4. m. Extremo que pueden alcanzar lo físico y lo anímico ...
5. m. *Mat.* En una secuencia infinita de magnitudes, magnitud fija a la que se aproximan cada vez más los términos de la secuencia. Así, la secuencia de los números  $2n/(n+1)$ , siendo  $n$  la serie de los números naturales, tiene como **límite** el número 2.”

En el diccionario de uso del español de María Moliner aparecen:

“Línea, punto o momento que señala la separación entre dos cosas en sentido físico o inmaterial.// (gram. pl.) Particularmente, línea imaginaria que señala la separación entre dos países, fincas, etc. Línea, punto o momento que señala el final de algo, en sentido físico o inmaterial: El límite de resistencia de un material// (pl.) Especificaciones que determinan hasta dónde llega una cosa no material ...// Se emplea invariable en aposición ...// Un caso límite ...// Se usa también en aposición aplicado a las personas que están en el límite de la normalidad y la subnormalidad”.

En inglés el término equivalente es “limit”, del que en el Oxford online encontramos:

“ A point or level beyond which something does not or may not extend or pass: [un punto o nivel más allá del cual no o puede que no se puede extender o pasar]// the terminal point or boundary of an area or movement: [el punto final o fronterizo de un área o movimiento]// the furthest extent of one’s physical or mental endurance: [la máxima medida de la resistencia física o mental de uno]// 2. a restriction on the size or amount of something permissible or possible: [una restricción del tamaño o cantidad de algo admisible o posible]// 3. Mathematics. a point or value which a sequence, function, or sum of a series can be made to approach progressively, until they are as close to it as desired. [un punto o valor al cual una secuencia, función o suma de una serie puede aproximarse progresivamente, hasta que estén tan cerca a él como se desee]”.

Como vemos en los tres diccionarios, los dos españoles y el inglés, existe una acepción específica del término límite en relación con las matemáticas. No es casual que en ellos aparezcan otros términos relacionados con el concepto de límite o sinónimos como alcanzabilidad y cercanía respectivamente.

Una vez concretadas las distintas acepciones de los términos seleccionados, nos parece oportuno remarcar que en este análisis conceptual no se incluyen los sistemas de representación asociados al concepto de límite, y por tanto a la noción de tendencia, que ya han sido tratados en el apartado II.2. El significado del concepto (no del término “límite”) se incluye en el epígrafe II.5.

Para completar el análisis conceptual de los términos “aproximarse”, “tender”, “alcanzar”, y “límite” destacamos las siguientes conclusiones:

- Teniendo en cuenta las acepciones del término “aproximar” en los diferentes diccionarios consultados, en este trabajo vamos a considerar el término “acercarse” como sinónimo del mismo a la hora de interpretar las respuestas de los alumnos a los ítems del cuestionario.
- Según las definiciones obtenidas mediante la búsqueda del término, “tender a” es aproximarse de forma progresiva pero sin llegar a alcanzar. La distinción

entre ambos términos, “tender a” y “aproximarse” nos viene dada por Blázquez, Gatica y Ortega (2009). Estos autores consideran que una sucesión de números *se aproxima a* un número si el error disminuye. Por ejemplo, la sucesión  $\left(\frac{1}{n}\right)$  se aproxima a -1, pero consideran que una sucesión *tiende a un límite*, si cualquier aproximación al límite es mejorable por términos de la sucesión. Por lo tanto la sucesión  $\left(\frac{1}{n}\right)$  se aproxima a 0 y tiende a 0, pero no tiende a -1.

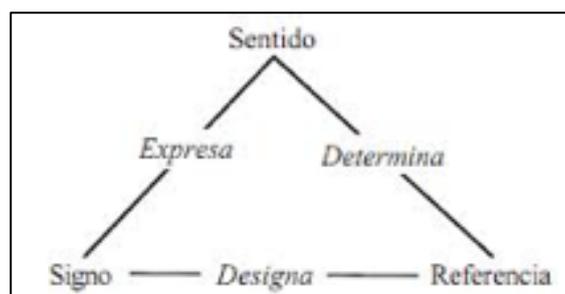
- En la revisión de la literatura hemos detectado que los términos “alcanzar” y “rebasar” se encuentran íntimamente relacionados entre sí cuando se estudia el concepto de límite. En nuestro caso veremos como al preguntar a los 26 estudiantes de primer curso de bachillerato de nuestra muestra por la noción de tendencia, el término “rebasar” no aparece de forma espontánea en sus respuestas. Sí surge el término “alcanzar” y expresiones que consideramos equivalentes como “llegar” (por ejemplo: *se acerca pero nunca llega*).
- El uso común del término límite como algo no alcanzable ha originado intuiciones erróneas y dificultades en la comprensión del concepto por parte de los estudiantes (Cornu 1991). A lo largo del presente estudio, durante la fase de análisis, obtendremos evidencias de ello.

## II.5 Significado de un concepto matemático

Vamos a comenzar este epígrafe con la noción de significado que se deriva de los trabajos de Frege a través de un *triángulo semántico* que incluye *signo*, *sentido* y *referencia*.

Figura 2.1

*Significado de un concepto matemático*



Según el propio Frege (1996a):

*“ Es natural considerar entonces que a un signo (nombre, unión de palabras, signo escrito), además de lo designado, que podría llamarse la referencia del signo, va unido lo que yo quisiera denominar el sentido del signo, en el cual se halla contenido el modo de darse (. . . ) al signo le corresponde un determinado sentido y a éste, a su vez, una determinada referencia, mientras que a una referencia (a un objeto), no le corresponde solamente un signo ”*

En otro de sus trabajos (Frege 1996b), particulariza esa noción de significado al significado de un concepto matemático, que incluye: signo o símbolos que los expresan; concepto formal (estructura conceptual); y sentido (o modo en el que vienen dados los objetos).

En el ámbito de las matemáticas escolares adoptamos la adaptación de Rico (2007) que propone combinar la teoría de Frege con el marco curricular de las matemáticas escolares. Esto otorga al concepto de un sistema de relaciones mucho más amplio que el lógico y formal de Frege mediante la inclusión de contextos y situaciones que incluyen fenómenos del mundo físico, natural o social que dan sentido al concepto. Rico propone que la definición de significado de un concepto en la matemática escolar contemple: símbolos o sistemas de representación que lo expresan; concepto formal dado por extensión o por una expresión funcional que forma parte de la estructura conceptual; y sentido o modo en el que vienen dados los objetos que saturan el concepto que son fenómenos del mundo físico, natural o social o que proceden del tipo de relación con una estructura de las matemáticas.

Este nuevo enfoque enriquece el planteamiento del modelo cognitivo propuesto por Vinner (1983) de forma que la introducción de los sistemas de representación y de la fenomenología, dan lugar a una mayor elaboración del modelo cognitivo basado en imágenes y definiciones conceptuales. Según Rico, el conocimiento de un concepto se concibe no sólo como el manejo de su definición formal y sus representaciones, sino como una nueva forma de dar sentido al concepto mediante la fenomenología que supone un paso previo al desarrollo de las competencias de modelización y resolución de problemas.

### **III. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN**

#### **III.1 Tipo de estudio. Descripción general**

Los antecedentes descritos muestran el interés que suscita el concepto de límite finito de una función en un punto para los investigadores en Didáctica de la Matemática. Nuestro estudio está centrado en la noción de tendencia, relacionada con el concepto de límite. En concreto, está enfocado a la detección de perfiles y singularidades en las concepciones de un grupo de alumnos sobre esta noción, según los datos recogidos mediante un cuestionario semántico, tal y como lo manifiestan en sus respuestas. Este trabajo se puede considerar exploratorio; no son frecuentes los estudios que interpretan las concepciones de alumnos acerca del concepto de límite, y más concretamente vinculados con la noción de tendencia, singularmente en España. El marco teórico, presentado en el epígrafe II, incluye un análisis crítico de las componentes del triángulo semántico de Frege. Este instrumento analítico, si bien se ha usado en estudios previos sobre el concepto de límite, es pionero en la consideración de la noción de tendencia.

Al proponerse detectar y describir perfiles y singularidades en las respuestas de los alumnos al cuestionario elaborado, este estudio puede denominarse descriptivo. La muestra de 26 alumnos es intencional y por disponibilidad. Como ocurre en este tipo de estudios no se pretende generalizar resultados, sino identificar perfiles y caracterizar sus singularidades dentro de un contexto escolar determinado, cuyas particularidades destacamos a continuación.

El instrumento de recogida de datos es un cuestionario semántico (Blok, 2014), estructurado según tareas que surgen de trabajos previos y de la revisión de otros formularios que proceden de distintos estudios. El hecho de que este tipo de cuestionarios interpelen acerca de qué aspectos del conocimiento se conservan cuando la presión externa que estuvo en su origen ha desaparecido (por ejemplo un examen) ha provocado que en los últimos años se hayan implementado cuestionarios semánticos en muy diversos tipos de investigaciones.

Esta es la primera ocasión en que se lleva a cabo un análisis de los datos de este cuestionario (Anexo 0). El análisis comienza con una detección de términos clave en las

respuestas de los estudiantes, los cuales permiten identificar temas que ayuden a establecer y definir las variables que se consideran para el estudio de estas tareas. Los valores de las variables se localizan en las respuestas de los alumnos y el estudio se completa mediante uso sistemático de las técnicas del análisis factorial (AF), que proporcionarán los perfiles buscados. A lo largo de los procesos del AF seguidos se irán caracterizando las singularidades detectadas.

### **III.2 Sujetos, ciclo y nivel curricular**

El cuestionario se aplicó a un grupo natural de 26 alumnos de 1º de bachillerato del “IES La Sagra” de Huéscar, en la provincia de Granada y fue respondido por todos ellos. Estos alumnos tienen edades comprendidas entre los 16 y 17 años.

El profesor titular responsable de la asignatura autorizó y estuvo presente durante la implementación del cuestionario. Nos informó que durante el año en que cursaron 4º de ESO los estudiantes habían recibido formación sobre límites de sucesiones, algo que no había tenido lugar en 1º de bachillerato. Durante el año escolar en curso ya habían recibido instrucción acerca del concepto de límite finito de una función en un punto, si bien aún no la habían recibido sobre asíntotas verticales y horizontales de una función.

Así pues, las definiciones y representaciones que los alumnos expresan en sus respuestas al cuestionario no son exclusivamente espontáneas, genéricas o intuitivas, sino que están influenciadas por el libro de texto de matemáticas, por el trabajo realizado en clase y por los conocimientos del profesor. No obstante, el propósito del cuestionario no es llevar a cabo un examen y comprobar qué conocimientos se han memorizado o qué algoritmos saben aplicar estos alumnos. Por el contrario, se trata de constatar de cuáles componentes del significado de la noción de convergencia se han apropiado los estudiantes, cómo los integran en sus expresiones, en sus argumentos y en sus modos de uso. Es decir, cuáles modos de expresar el significado de este concepto han asumido y cómo lo emplean. De este modo, aunque las preguntas están vinculadas con el conocimiento matemático escolar previo recibido sobre el concepto de convergencia, en su enunciado no piden una definición o una demostración sino que, solicitan una descripción personal o una explicación en términos propios.

### **III.3 Aplicación del instrumento**

Las preguntas incluidas en el cuestionario fueron entregadas a los alumnos en formato de cuadernillo. En la portada se agradece a los estudiantes su colaboración, se dan una serie de indicaciones y se pregunta por la calificación media que suelen obtener en la asignatura de Matemáticas I, singularmente la del último examen, así como sus datos personales (edad y género). Se adjunta en el Anexo 0 la portada y las 4 cuestiones seleccionadas en este estudio.

El día de aplicación fue el 22 de abril de 2014, a 4ª hora (11:45-12:45), en el “IES La Sagra” de Huéscar (Granada), en el aula en la que normalmente los alumnos de este curso asisten a clase.

El día previo el investigador se había presentado a los sujetos y había explicado en qué iba a consistir la aplicación del cuestionario sin adelantar nada sobre su contenido. Justo antes de comenzar a responder el cuestionario, el investigador resolvió las dudas acerca de cómo responder cada ítem, acompañado por el profesor titular de la asignatura.

Durante la sesión de aplicación no hubo ningún incidente reseñable. Los cuadernillos fueron recogidos en las mesas de los estudiantes. Para finalizar, el investigador agradeció a los alumnos su colaboración y, en particular, al profesor la hora de clase en la que se implementó el cuestionario.

### **III.4 Fiabilidad/Validez de los resultados**

La fiabilidad y validez de los resultados se atienen al hecho de que se trata de un estudio exploratorio. El dato de que las variables de estudio estén relacionadas con términos vinculados con el concepto de límite finito de una función en un punto procedentes de otras investigaciones previas, avalan la detección y caracterización de perfiles en base a la presencia o ausencia de dichas variables en las respuestas de los alumnos. El tamaño de la muestra es una limitación en la realización de cualquier AF; aún así la fiabilidad de dichos análisis quedará controlada por el índice de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) y por el nivel de significación en la prueba de esfericidad de Bartlett, así como por el determinante de la matriz de correlaciones (ver epígrafe IV.4).

La validez externa se atendió mediante el marco teórico elegido, los antecedentes revisados y la elaboración del cuestionario semántico. Por su parte, la validez interna se controló durante las reuniones con los investigadores en el proceso que llevó a la ejecución de este estudio.

## IV. ANÁLISIS DE LOS DATOS

### IV.1 Enunciados del cuestionario. Consideraciones generales

El cuestionario semántico con el que se trabaja en el presente estudio consta de 4 cuestiones que tienen que ver con la noción de tendencia hacia un valor de una variable y tendencia hacia un valor de una función dependiente de la tendencia de una variable. Los enunciados de esas cuestiones son:

1. *Explica con tus propias palabras cómo entiendes la expresión "x tiende a 0"*
2. *Representa "x tiende a 0"*
3. *Explica con tus propias palabras cómo entiendes la expresión: "f(x) tiende a 1 cuando x tiende a 0"*
4. *Representa "f(x) tiende a 1 cuando x tiende a 0"*

Las cuestiones 1 y 2 se refieren a tendencia de la variable independiente hacia un valor (0 en este caso), mientras que las cuestiones 3 y 4 tratan de la tendencia de una función, condicionada por la tendencia de su variable independiente hacia otro valor (0, igualmente). Además, tanto la cuestión 1 como la 3 son preguntas de describir o argumentar, ya que piden a los alumnos que expliquen, mientras que la 2 y la 4 son preguntas de expresar o representar, que piden que a los escolares que representen. Es de esperar por tanto que las respuestas a las cuestiones 1 y 3 sean eminentemente declaraciones verbales y que aparezcan términos y/o relaciones que describan aspectos relativos a la estructura del concepto de tendencia, tanto en una variable como en dos. Si hablamos del significado matemático del concepto, serían respuestas centradas en su **referencia**.

Por su parte, en las cuestiones 2 y 4, se espera obtener distintas expresiones o representaciones de tendencia en una variable independiente y en dos variables, una de las cuales depende de la otra, respectivamente. Con lo cual las respuestas tendrán que mostrar el concepto utilizando algún sistema de representación. En este caso, si hablamos del significado matemático del concepto, serían respuestas centradas en su **signo**.

Una vez que se dispuso de las respuestas de cada uno de los alumnos para estas 4 preguntas y con el fin de organizar, codificar e integrar la información, se trasladaron dichas respuestas a una tabla. Esta tabla identificaba en sus filas las respuestas de cada uno de los 26 alumnos y en cada columna presentaba las respuestas correspondientes a cada una de las 4 cuestiones del test. Se integraron todas las respuestas de los alumnos en las celdas respectivas y se incluyeron una serie de observaciones en cuanto a: términos relacionados con el concepto de límite tratados en investigaciones previas; sistemas de representación; tipo de función usada; y otros. Una visión global de la tabla y un ejemplo de las puntualizaciones se puede encontrar en el anexo I.

Completada la tabla general con el total de respuestas recogidas, se llevó a cabo una recopilación de observaciones para cada una de las cuestiones. Identificamos así una lista de los términos y expresiones más usados por los alumnos en cada ítem (ver epígrafe IV.2). Las respuestas a las preguntas planteadas proporcionan las unidades de información del estudio. Por ejemplo en la cuestión 1 aparecen términos como: “alcanzabilidad”, “aproximarse a”, “aproximarse mucho a”, “acercarse a”, “acercarse infinitamente”, “aproximarse tanto como se quiera”, “aproximarse infinitamente”, “acercarse por la izquierda y por la derecha”, “sustituir en”, “su valor es” o “aproximarse por la izquierda y por la derecha”; junto con otras circunstancias como la introducción de la variable dependiente para explicar la tendencia en una variable.

A partir de estos listados se determinaron una serie de enunciados o temas más generales que sirvieron para agrupar, clasificar y codificar las respuestas. Se tuvieron en cuenta antecedentes, la aparición de términos relacionados con el concepto de límite finito de una función en un punto, y otras circunstancias que nuestro conocimiento sobre el tema indicaron ser relevantes en las respuestas de los alumnos acerca del significado del concepto de tendencia. Los temas identificados en las distintas preguntas condujeron al enunciado de las variables para el análisis subsiguiente.

Estas variables fueron introducidas en una tabla para cada una de las 4 cuestiones y se localizó en las respuestas de cada uno de los alumnos si estaban o no presentes, para su codificación posterior correspondiente en cada cuestión.

A esta tabla la denominamos “matriz general de datos”. A lo largo del estudio hicimos diferentes análisis parciales de los datos de esta matriz general, partiendo de las “matrices de presencia/ ausencia” (ver anexo II).

#### IV.2 Identificación y recuento de términos clave

El primer análisis que se completó fue el que en este punto hemos llamado **análisis específico** de datos. Consistió en observar los términos, sistemas de representación, tipos de funciones y otras circunstancias que, bajo nuestro criterio, se podían identificar como **datos y términos relevantes** a partir de las respuestas de los alumnos, considerando cada una de forma aislada.

Tabla 4.1

*Unidades de información extraídas de las respuestas a cuestiones de forma individual.*

CUESTIÓN 1		
7 alumnos se apoyan en una variable dependiente para explicar verbalmente la tendencia en una variable independiente	18 alumnos usan los términos “aproximarse” o “acercarse” en sus descripciones o definiciones	8 alumnos hablan de acercamiento o aproximaciones por la izquierda y por la derecha
3 alumnos confunden variable dependiente e independiente	3 alumnos emplean “aproximarse mucho” o “más cercano”, es decir, de alguna manera relativizan la aproximación o la cercanía con respecto a otras	4 alumnos usan simbología relativa al cálculo de límites
3 alumnos hablan de “no alcanzabilidad”, mientras que sólo 1 habla de “alcanzabilidad”	3 alumnos usan las expresiones “acercarse infinitamente” o “aproximarse tanto como se quiera”	7 alumnos usan expresiones como “sustituir en”, “toma el valor” o directamente sustituyen de forma analítica
CUESTIÓN 2		
14 alumnos usan la representación gráfica	16 alumnos utilizan la representación simbólica	3 alumnos usan el sistema de representación tabular
CUESTIÓN 3		
5 alumnos confunden las	5 alumnos hablan de	9 alumnos sustituyen o

variables dependiente e independiente	aproximaciones laterales por la izquierda y por la derecha	hablan de “dar el valor” o “sustituir en”
4 alumnos usan términos como “aproximarse infinitamente” o “aproximarse cada vez más”	5 alumnos emplean la simbología de cálculo de límites o incluso hacen referencia a algoritmos de cálculo	9 alumnos relativizan la aproximación como mejor que otras
19 alumnos utilizan el término “aproximarse a”	1 alumno habla de no alcanzabilidad	

#### CUESTIÓN 4

9 alumnos usan la representación gráfica	14 alumnos utilizan la representación simbólica	7 alumnos usan el sistema de representación tabular
--	---	---

A partir de estos primeros datos y términos específicos, se llevó a cabo una segunda reducción mediante la identificación de **temas**, donde se reúnen las acepciones de un mismo término que combinan datos del recuento anterior. Los términos destacados para las cuestiones 1 y 3, por un lado, y 2 y 4, por otro, coinciden, por tanto estudiamos de manera conjunta los temas que se identifican en las respuestas a dichos ítems. El empleo de términos y temas quedan recogidos en las siguientes tablas

Tabla 4.2

*Unidades de información extraídas de las respuestas a pares de cuestiones*

CUESTIONES 1 Y 3	
3 y 5 alumnos confunden variable dependiente e independiente respectivamente para las 2 cuestiones. Sólo un alumno lo hace en ambas	4 y 1 alumnos hablan de no alcanzabilidad en dichas cuestiones. Dicho alumno lo hace en ambos ítems
4 y 5 alumnos emplean la simbología de cálculo de límites, respectivamente. Dos de ellos lo hacen en ambas cuestiones	3 y 4 alumnos hablan de “aproximarse infinitamente” o “aproximarse cada vez más” respectivamente. Dos de ellos además lo hacen en ambas cuestiones
8 y 5 estudiantes usan las aproximaciones laterales por izquierda y derecha. Dos de ellos lo hacen en ambos ítems	7 y 9 alumnos usan “sustituir en” o “dar el valor” en las tareas 1 y 3. Tres de ellos lo usan en ambas
CUESTIONES 2 Y 4	
En total usan el sistema de representación gráfico 15 alumnos distintos, de los cuales 8 lo utilizan en ambas tareas	17 estudiantes utilizan el sistema de representación simbólico en alguna de estas cuestiones. 11 lo usan en ambas
8 alumnos usan el sistema de representación tabular, pero sólo 2 en ambas	

Además, dentro de esta síntesis de respuestas para las cuestiones 2 y 4, también resulta relevante estudiar cuántos sistemas de representación distintos utilizan los alumnos en sus respuestas al cuestionario, aparte del verbal.

Tabla 4.3

*Sistemas de representación usados por cada alumno.*

<b>CUESTIONES 2 Y 4</b>
9 alumnos usan un solo sistema de representación, 3 sólo el simbólico y 6 sólo el gráfico. Ningún alumno usa en exclusiva el sistema de representación tabular
12 alumnos usan dos sistemas distintos de representación, de los cuales: <ul style="list-style-type: none"> <li>- 9 alumnos usan el simbólico y el gráfico.</li> <li>- 2 alumnos usan el simbólico y el tabular.</li> <li>- 1 alumno usa el gráfico y el tabular.</li> </ul>
5 alumnos usan los 3 sistemas de representación
En total, 18 alumnos usan el sistema de representación gráfico, 22 el simbólico y 8 el tabular

### **IV.3 Caracterización de las variables para análisis de las respuestas. Identificación de singularidades.**

#### Variables tipo REF#:

A partir de los listados de datos y así como de los temas que surgen de los análisis combinados de los términos usados por los alumnos en las respuestas a las cuestiones 1 y 3, hemos definido 8 variables. Son variables que hemos llamado de *referencia* dentro del significado del concepto tendencia, por tanto las hemos denominado REF#.

Como se puede ver en las respuestas específicas, numerosos alumnos en estas cuestiones usan el término aproximarse o acercarse. En nuestro estudio hemos considerado “aproximarse” y “acercarse” como términos sinónimos o equivalentes. Además, identificamos distintos grados o niveles de uso en dichas respuestas de los alumnos:

- Nivel 1: “aproximarse” o “acercarse”. Los estudiantes usan estos términos pero no tiene porqué relativizarlos ni compararlos. Como ejemplo, la respuesta a la cuestión 1 del alumno 11:

Figura 4.1

*Respuesta del alumno 11 a la cuestión 1*

$x$  tiende a 0 significa que  $x$  es una variable real cuyo valor se aproxima a 0.

- Nivel 2: “aproximarse/acercarse mucho” o “más cercano”. Interpretamos que los alumnos usan estos términos tratando de expresar una aproximación que mejora a otras. Como ejemplo, la respuesta a la cuestión 1 del estudiante 5:

Figura 4.2

*Respuesta del alumno 5 a la cuestión 1*

Cuando los valores de una expresión se acercan mucho a 0.

- Nivel 3: “aproximarse infinitamente” o “acercarse cada vez más”. En este nivel consideramos aquellas respuestas que hablan de la mejor aproximación de todas. Como ejemplo la respuesta del alumno 3 a la cuestión 3:

Figura 4.3

*Respuesta del alumno 3 a la cuestión 3*

Que la función  $f(x)$  se aproxima infinitamente a 1, cuando la  $x$  también se aproxima infinitamente a 0.

De este modo surgen las 3 primeras variables en las respuestas a las cuestiones 1 y 3 de este estudio:

- *REF1: Presencia de términos/expresiones relacionados con la proximidad o cercanía*
- *REF2: Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora a otras*
- *REF3: Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora al resto*

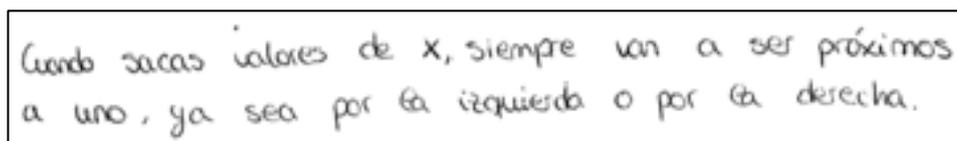
La cuarta variable en las respuestas a las cuestiones 1 y 3 también está relacionada con los términos aproximarse y acercarse, pero en este caso caracteriza aquellas respuestas que hablan de aproximaciones laterales:

- *REF4: Presencia de aproximaciones por la derecha y por la izquierda*

Como ejemplo, la respuesta a la pregunta 3 del alumno 5:

Figura 4.4

*Respuesta del alumno 5 a la cuestión 3*



Cuando sacas valores de  $x$ , siempre van a ser próximos a uno, ya sea por la izquierda o por la derecha.

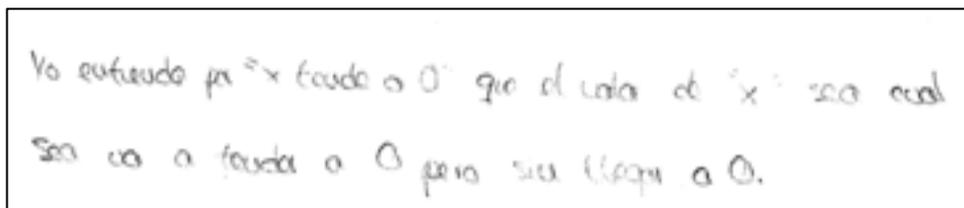
La quinta variable a las respuestas a las cuestiones 1 y 3 está presente en aquellas respuestas en las que interpretemos que el estudiante menciona la no alcanzabilidad mediante el uso de expresiones como “aproximarse pero sin llegar a ser”:

- *REF5: Presencia de términos/expresiones relativos a la no alcanzabilidad*

Como ejemplo, la respuesta a la cuestión 1 por parte del alumno 21:

Figura 4.5

Respuesta del alumno 21 a la cuestión 1



Yo entiendo por "x tiende a 0" que el valor de "x" sea real  
sea un a tiende a 0 pero sea igual a 0.

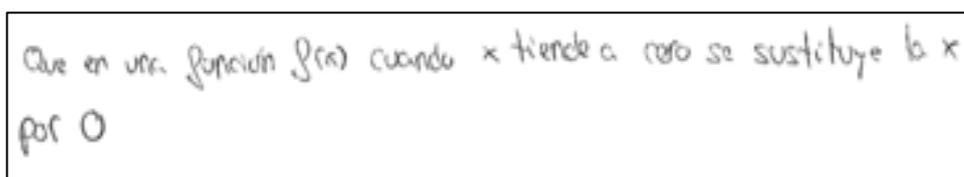
La sexta variable para las cuestiones 1 y 3 comprende aquellas expresiones como “sustituir por” o “toma el valor de”:

- REF6: El alumno usa elementos como sustituir en, la función vale...

Como ejemplo, la respuesta del alumno 23 al ítem 1:

Figura 4.6

Respuesta del alumno 23 a la cuestión 1



Que en una función  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a cero se sustituye la  $x$   
por 0

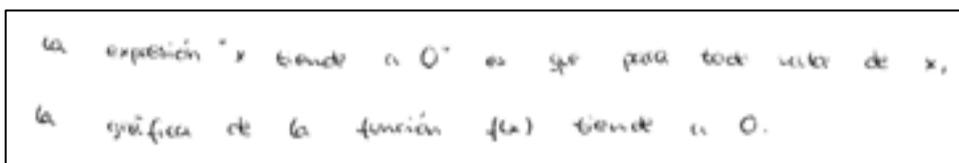
La séptima variable para las cuestiones 1 y 3 hace referencia a aquellas respuestas en las que el alumno introduce la variable dependiente sin necesidad o incluso en aquellas que confunde una variable con otra.

- REF7: El alumno usa la variable dependiente sin necesidad / El alumno confunde variable dependiente e independiente

Como ejemplo, la respuesta a la cuestión 1 del alumno 26:

Figura 4.7

Respuesta del alumno 26 a la cuestión 1



la expresión " $x$  tiende a  $0$ " es que para todo valor de  $x$ ,  
la gráfica de la función  $f(x)$  tiende a  $0$ .

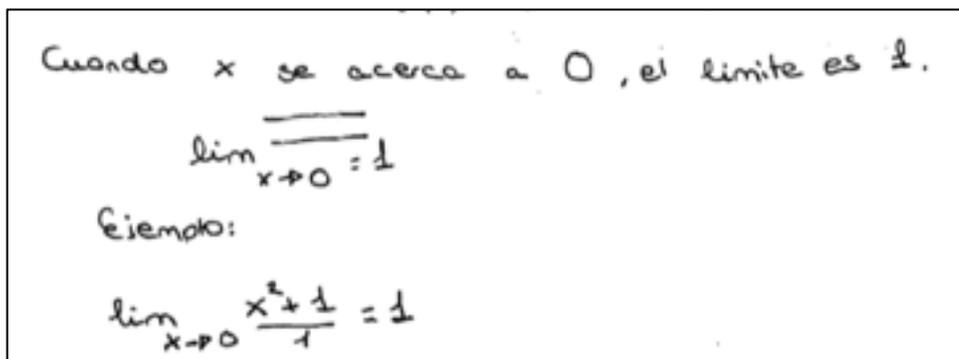
Por último, la variable octava para las cuestiones 1 y 3 se establece por:

- REF8: El alumno emplea algoritmos de cálculo de límites en la definición

Como ejemplo, la respuesta del alumno 19 a la tarea 3:

Figura 4.8

Respuesta del alumno 19 a la cuestión 3



Cuando  $x$  se acerca a  $0$ , el límite es  $1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\quad}{\quad} = 1$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{1} = 1$$

Variables tipo SIG#:

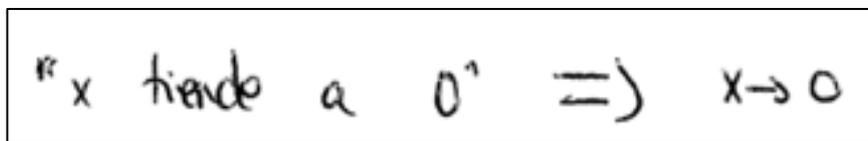
Atendiendo a las respuestas a las cuestiones 2 y 4, que pedían al alumno que representara la tendencia en una variable y la tendencia de la función cuando la variable independiente tiende a cero, comenzamos considerando qué tipo de sistema de representación aparece en cada respuesta.

Uno de los aspectos que encontramos, que puede suponer un nexo entre las respuestas verbales (referencia) y no verbales (signo), se presenta cuando el alumno emplea aproximaciones por la derecha y la izquierda, o exclusivamente por uno de los lados.

Al analizar las respuestas a la cuestión 2, notamos que son muy pocos los alumnos que intentan representar lo que se les pide usando sólo una variable. En concreto, sólo hay 3 alumnos (6, 17 y 18) que lo hacen. Como ejemplo la respuesta del alumno 6:

Figura 4.9

*Respuesta del alumno 6 a la cuestión 2*

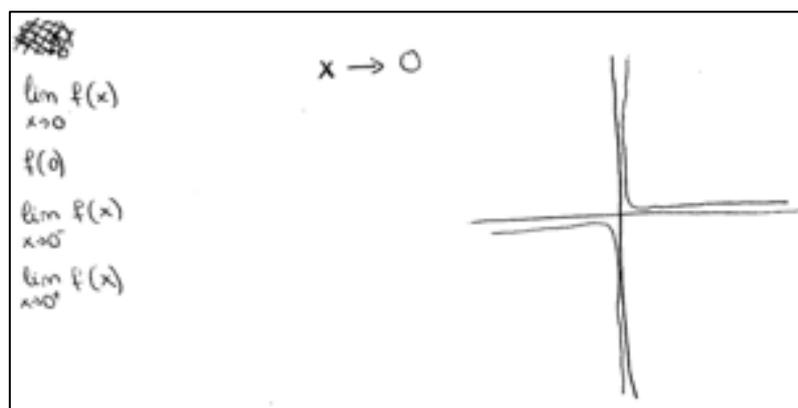


"x tiende a 0"  $\Rightarrow$   $x \rightarrow 0$

Se identifican otras respuestas que combinan representaciones en las que aparece sólo una variable y otras en las que aparecen dos. En concreto hay 4 alumnos en este caso (4, 5, 7 y 22). Como ejemplo, la respuesta del alumno 5:

Figura 4.10

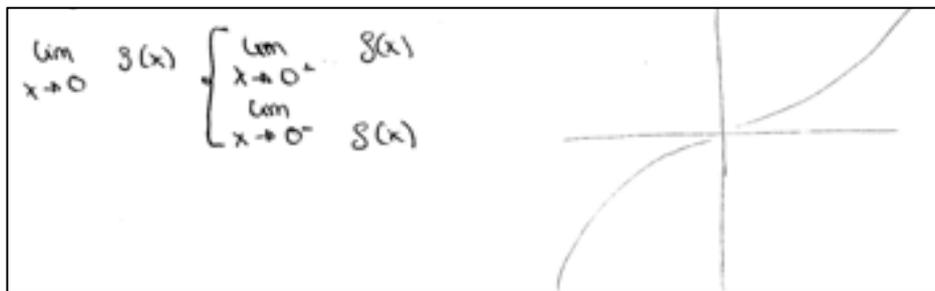
*Respuesta del alumno 5 a la cuestión 2*



Por último, la mayoría de alumnos (18 de 26) recurren exclusivamente a una función para representar la tendencia de la variable independiente. Como ejemplo la respuesta del alumno 12:

Figura 4.11

Respuesta del alumno 12 a la cuestión 2



Este estudio trata de identificar perfiles de alumnos a partir de sus respuestas y la mayoría recurre a la variable dependiente para responder a la cuestión 2. De este modo, consideramos el resto de respuestas (que aparecen en 7 alumnos, ya sea de manera única o no) como una primera singularidad del análisis (ver epígrafe IV.7).

Teniendo en cuenta el sistema de representación usado y la inclusión de aproximaciones por ambos lados o por un único lado, tenemos:

Tabla 4.4

*Alumnos que usan los distintos sistemas de representación según el número de variables y si la aproximación es doble o simple*

<b>Alumnos que discriminan dos variables en la tendencia en una variable</b>		
	<b>APROXIMACIÓN DOBLE</b>	<b>APROXIMACIÓN ÚNICA</b>
<b>SRT<sup>1</sup></b>	7, 9, 16	1
<b>SRG<sup>2</sup></b>	3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 16, 23, 24	22
<b>SRS<sup>3</sup></b>	5, 12, 24	1, 2, 10, 14, 15, 19, 25, 26
<b>Alumnos que discriminan dos variables en la tendencia en dos variables</b>		
	<b>APROXIMACIÓN DOBLE</b>	<b>APROXIMACIÓN ÚNICA</b>
<b>SRT<sup>1</sup></b>	1, 7	2, 3, 9, 17, 18, 20
<b>SRG<sup>2</sup></b>	4, 7, 9, 11, 13, 17, 22, 23	8
<b>SRS<sup>3</sup></b>	5, 12, 14	6, 9, 10, 11, 15, 17, 20, 21, 24, 25, 26

<sup>1</sup> Sistema de Representación Tabular

<sup>2</sup> Sistema de Representación Gráfico

<sup>3</sup> Sistema de Representación Simbólico

A partir de esta tabla, definimos las variables de tipo SIG#:

- *SIG1: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones*
- *SIG2: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Tabular con 1 aproximación*
- *SIG3: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones*
- *SIG4: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 1 aproximación*
- *SIG5: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones*
- *SIG6: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación*
- *SIG7: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones*
- *SIG8: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Tabular con 1 aproximación*
- *SIG9: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones*
- *SIG10: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Gráfico con 1 aproximación*
- *SIG11: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones*
- *SIG12: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación*

Consideraremos singulares aquellas variables que estén representadas por 2 o menos alumnos. Así la lista de singularidades de nuestro estudio queda completa tal y como sigue:

- *SING1: Discriminan 1 variable en convergencia en 1 variable*

- *SING2: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Tabular con 1 aproximación (SIG2)*
- *SING3: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 1 aproximación (SIG4)*
- *SING4: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones (SIG7)*
- *SING5: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Gráfico con 1 aproximación (SIG10)*

Por su parte, las variables de signo serán:

- *SIG1: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones*
- *SIG3: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones*
- *SIG5: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones*
- *SIG6: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación*
- *SIG8: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Tabular con 1 aproximación*
- *SIG9: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones*
- *SIG11: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones*
- *SIG12: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación*

Tras identificar las variables de estudio para cada cuestión, 8 variables de referencia encontradas para las tareas 1-3 y 12 variables de signo encontradas para las tareas 2-4, se completó una tabla de presencia/ausencia de cada una de estas variables en las respuestas de cada alumno. Se trata de tablas de 26 filas (alumnos) por el número de variables definidas para cada cuestión por columnas. Se codificaron las respuestas con 1

si interpretamos que la variable aparece en la respuesta del estudiante a dicho ítem, o con 0 en caso contrario (Anexo II).

#### IV.4 Estrategia de análisis. El análisis factorial (AF)

Tan pronto se hubieron definido las tablas de ausencia/presencia para cada una de las tareas del instrumento, profundizamos en la búsqueda de perfiles de alumnos atendiendo a las variables usadas para cada una de las respuestas. La técnica elegida fue el **análisis factorial**.

El análisis factorial (AF) es un procedimiento matemático-estadístico destinado a reducir información relativa a un conjunto de variables para obtener un conjunto menos numeroso de ellas. Este segundo conjunto, a pesar de ser menor en número, permite explicar la variabilidad común en un grupo de sujetos que responden a las variables originales.

Yela (1997) sostuvo:

*“La razón del éxito del AF habría que buscarla en el hecho de que es susceptible de ser aplicado a cualquier tipo de fenómenos, ya sean físicos, fisiológicos, psíquicos o sociales, sin declarar de antemano cuál es la naturaleza de dichos fenómenos.”*

Comrey (1985) estableció que un informe de estudio de AF debe incluir los objetivos que se pretenden alcanzar al aplicar la técnica, la muestra de trabajo, las variables iniciales, cómo se llevó a cabo la recogida de datos, las correlaciones, las condiciones de aplicación (índices de validez), el método de extracción factorial a usar, si se usa o no rotación, los resultados factoriales (descripción e interpretación) y, por último, una discusión de los resultados obtenidos.

En este estudio exploratorio, las condiciones de aplicación del AF son:

- Objetivos: se trata de reducir las variables de estudio iniciales a una serie de factores o componentes que permitan realizar una clasificación de perfiles de alumnos a partir de nuestra interpretación a sus respuestas al cuestionario.

- Muestra: algunos autores ven en el AF una extensión del modelo de regresión múltiple y consideran que la fiabilidad de las correlaciones se ve afectada por el número de observaciones. Nuestra muestra es de 26 alumnos por disponibilidad.
- Variables: las variables iniciales de estudio han sido extraídas a partir de las respuestas de los alumnos conforme a los términos relacionados con las componentes de significado del concepto de límite finito de una función en un punto que aparecen en la revisión de la literatura y otros trabajos del equipo; y los sistemas de representación usados. Este aspecto será tratado en mayor profundidad en el punto IV.4.
- Recogida de datos: la recogida de datos fue llevada a cabo el 22 de Abril de 2014 en el “IES La Sagra” de Huéscar (Granada) por el equipo de investigación en las condiciones que se especifican en el epígrafe III.
- Correlaciones: es fundamental tener en cuenta que si las correlaciones encontradas en un grupo de variables son muy bajas, es probable que dichas variables sean ya casi independientes entre sí. Si así fuera no tendría sentido la factorización. Por este motivo en cada uno de los AF se incluirá la matriz de correlaciones respectiva. En relación con el siguiente apartado (condiciones de aplicación del AF), es destacable que un valor bajo del determinante de la matriz de correlaciones va a favor de la fiabilidad del AF.
- Condiciones de aplicación del AF: Una de las medidas de adecuación muestral más usadas es la llamada medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin. Su función es comparar las magnitudes de los coeficientes de correlación observados con las magnitudes de los coeficientes de correlación parciales. Valores pequeños del índice KMO cuestionan el empleo del modelo factorial ya que, si así fuera, las correlaciones entre pares de variables no pueden explicarse por otras variables. Un KMO aceptable se sitúa en torno al 0,5 y se convierte en extraordinario si supera el 0,9.

Otra de las medidas usadas es el índice de significación de la prueba de esfericidad de Bartlett. La prueba de esfericidad de Bartlett (PEB) estima la probabilidad de que las correlaciones observadas en la muestra tengan cierto correlato en la población de la que han sido extraídas. Se considera aceptable un nivel de significación en la PEB menor de 0,05.

Así pues los índices de validez que vamos a tomar como propios son: un determinante bajo en la matriz de correlaciones; KMO como mínimo alrededor de 0,5 y nivel de significación en la PEB menor de 0,05.

- Extracción factorial: el método usado será el de componentes principales que hace posible reducir dimensiones reteniendo las características del conjunto de datos que contribuyen más a la varianza. Este método fue ideado por Pearson a finales del s. XIX como un método para ajustar planos mediante mínimos cuadrados ortogonales. Posteriormente fue propuesto por Hotelling con el propósito de analizar estructuras de correlación.
- Rotación: usar métodos de rotación facilita la interpretación de los valores de la matriz factorial (matriz de componentes) tras la extracción. La rotación ortogonal Equamax es el mejor método para la simplificación simultánea de factores y variables. Por ello será la rotación que usemos en los AF que incluye este estudio.
- Resultados factoriales: la descripción e interpretación de los componentes extraídos tendrá lugar en los puntos IV.5 y IV.6.
- Discusión: la discusión de los resultados obtenidos teniendo en cuenta los objetivos e hipótesis iniciales y las implicaciones en estudios posteriores se incluyen en el punto V.

Los distintos AF se desarrollan en los puntos IV.5 y IV.6.

Complementariamente a los datos obtenidos mediante el AF, se van a tener en cuenta las **singularidades** que van apareciendo en las respuestas de los alumnos. Se

consideraron como singulares aquellas variables que están representadas por 2 o menos alumnos, es decir, se eliminan del AF aquellas variables que acumulan 2 o menos valores “uno” (1) en la tabla de presencia/ausencia correspondiente. La poca representatividad de estas variables hace que se consideren prácticamente independientes respecto de las demás. Una hipotética inclusión de estas en el AF provocaría una pérdida de fiabilidad en los resultados.

También hemos definido como singularidad determinadas respuestas a la cuestión 2. La mayoría de los alumnos (21 de 26) usan la variable dependiente a la hora de representar la tendencia de la variable independiente. Así pues, las variables tipo SIG (signo) de la cuestión 2 hacen referencia a los distintos sistemas de representación que usan los alumnos cuando añaden una función y emplean dos variables para responder a la petición de representar la tendencia según una única variable. Por ello, en este caso hemos interpretado como una singularidad aquellas respuestas que se ajustan a la cuestión planteada y utilizan una única variable.

#### **IV.5 AF de pares de actividades**

Hemos comprobado que la información proporcionada por los análisis factoriales de pares de actividades resulta más rica e interesante que el análisis factorial de los resultados singulares de cada una de las cuestiones por separado, de cara a la detección de perfiles. Por esta razón el método elegido comienza por un análisis e interpretación de los pares de actividades antes mencionados. A continuación, en el siguiente epígrafe IV.6, se realizan los AF individuales, que matizan y dan precisión a los resultados previos obtenidos en los AF por pares de cuestiones.

Para cada uno de los análisis factoriales realizados se interpretan los factores obtenidos. Además, se describen los componentes extraídos a partir de los pesos factoriales de cada variable. El resto de datos técnicos de interés (descriptivos univariados, matriz de correlaciones, índices KMO y prueba de esfericidad de Bartlett, porcentaje de varianza total explicada, y matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en los componentes) se encuentran en los correspondientes anexos, XI a XVIII.

### Análisis Factorial cuestiones 1-2:

Podemos encontrar la tabla de presencia/ausencia para las respuestas a estas 2 cuestiones en el anexo II y la matriz de correlaciones para las 12 variables en el anexo XV. Se puede observar que el determinante de dicha matriz de correlaciones es muy bajo y que tanto el KMO como el nivel de significación de la prueba de esfericidad de Bartlett son aceptables y permiten asegurar la fiabilidad del análisis.

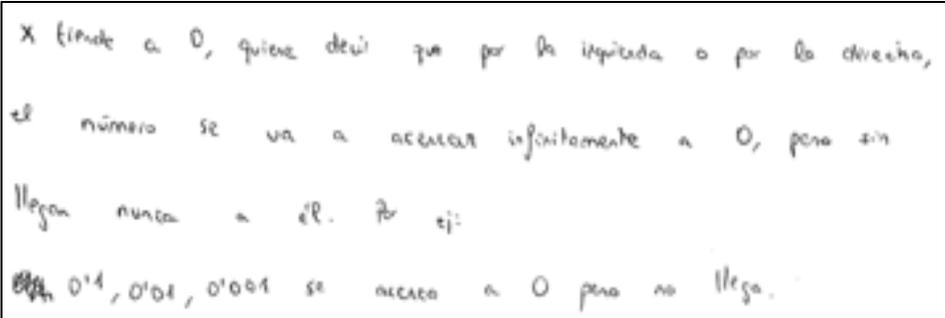
A partir de la matriz de componentes rotados, interpretamos los 4 factores que explican un 67,35% de la varianza total:

COMPONENTE 1 (C12C1): Las variables de mayor peso factorial en este primer componente son REF2, REF3, REF4 y SIG5. Se trata pues de un componente que destaca aquellas respuestas que hablan de *tendencia de la variable independiente como la mejor aproximación posible, teniendo en cuenta aproximaciones por la derecha y por la izquierda* y que muestran dicha tendencia *usando el sistema de representación simbólico con dos aproximaciones*. Así pues, podemos decir que la representación enfatiza la descripción verbal.

El gráfico radial que correspondería a este componente sería similar al del alumno 24 (anexo VII). Las respuestas de este alumno a las cuestiones 1 y 2 fueron:

Figura 4.12

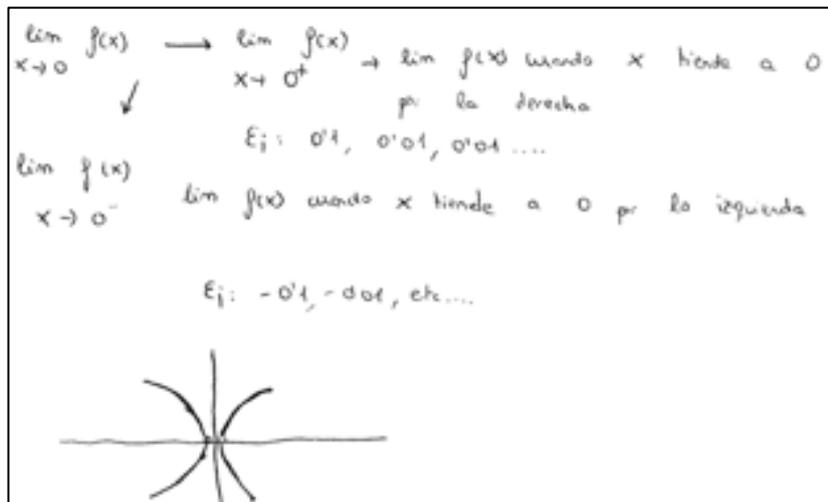
*Respuesta del alumno 24 a la cuestión 1*



X tiende a 0, quiere decir que por la izquierda o por la derecha, el número se va a acercar infinitamente a 0, pero sin llegar nunca a él. Por ej:  
~~0,1~~ 0,1, 0,01, 0,001 se acerca a 0 pero no llega.

Figura 4.13

Respuesta del alumno 24 a la cuestión 2

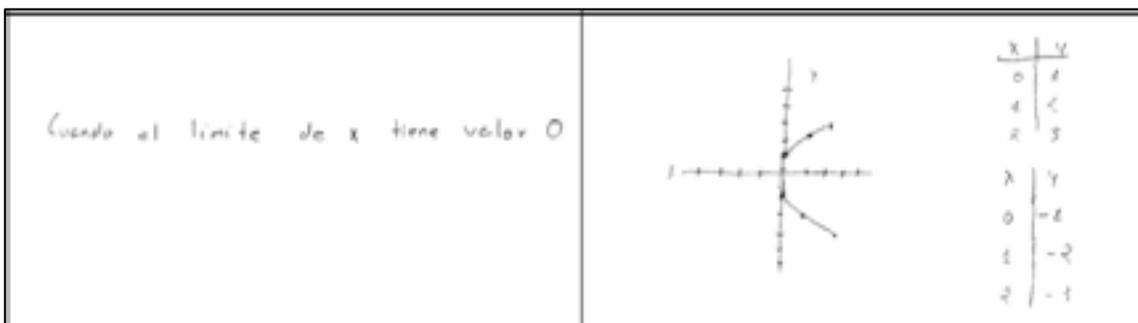


COMPONENTE 2 (C12C2): Las variables determinantes son ahora REF6 y REF7 y en menor medida SIG1. Esta componente viene marcada por aquellos alumnos que *usan una variable dependiente auxiliar a la hora de definir la tendencia de una variable independiente*. Además, utilizan expresiones como “sustituir en” o “toma el valor” y la representan usando el sistema de representación tabular con la doble aproximación.

El gráfico radial que acompañaría a esta componente sería una combinación del alumno 16 (anexo VII). Las respuestas de este alumno a las cuestiones 1 y 2 fueron:

Figura 4.14

Respuesta del alumno 16 a las cuestiones 1 y 2



COMPONENTE 3 (C12C3): Las variables influyentes ahora son SIG1 y SIG3. Se trata de respuestas en las que *aparece una variable auxiliar para definir tendencia de una*

variable independiente y las representaciones usadas son gráfica y simbólica, ambas con dos aproximaciones.

El gráfico radial en este caso sería parecido al de los alumnos 7 ó 9 (anexo VII). Las respuestas del alumno 7 a las cuestiones 1 y 2 fueron:

Figura 4.15

Respuesta del alumno 7 a la cuestión 1

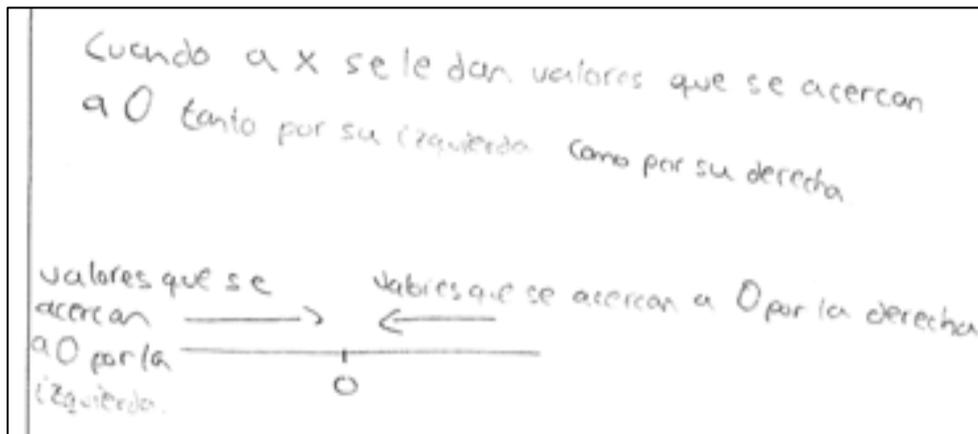
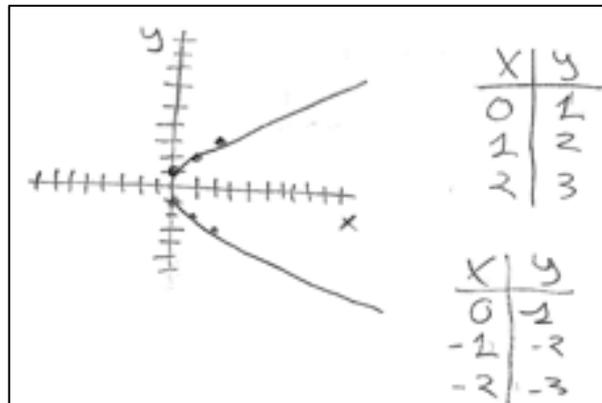


Figura 4.16

Respuesta del alumno 7 a la cuestión 2



COMPONENTE 4 (C12C4): Las variables con mayor peso factorial son REF8 y SIG5, con lo cual este factor identifica aquellas explicaciones verbales que hacen referencia al *cálculo de límites y representaciones simbólicas con una sola aproximación*.

El gráfico radial en este caso sería parecido al del alumno 12 (anexo VII). Las respuestas de este alumno a las cuestiones 1 y 2 fueron:

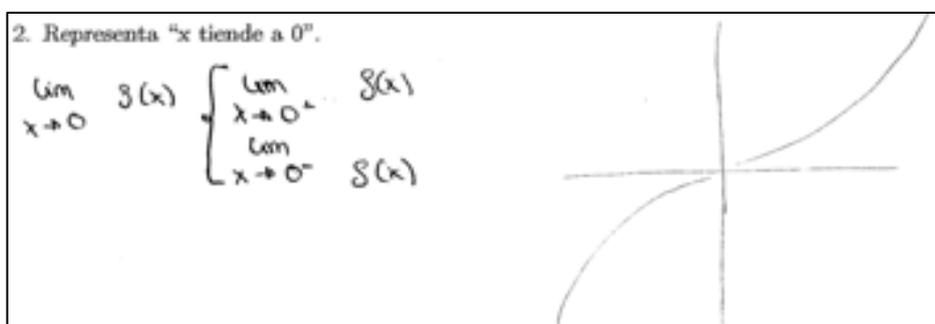
Figura 4.17

*Respuesta del alumno 12 a la cuestión 1*

Todo valor que tome  $x$  dentro de los números reales en la expresión algebraica, su límite tiende a 0, tanto por la izquierda y por la derecha.

Figura 4.18

*Respuesta del alumno 12 a la cuestión 2*



#### Análisis Factorial cuestiones 3-4:

Podemos encontrar la tabla de presencia/ausencia para las respuestas de estas 2 cuestiones en el anexo II y la matriz de correlaciones para las 11 variables en el anexo XVI. Se puede observar que el determinante de dicha matriz de correlaciones es muy bajo, sin embargo, tanto el índice KMO (0,432) como el nivel de significación en la prueba de esfericidad de Bartlett (0,157) están fuera de los valores que indican que el análisis factorial es fiable. Por tanto no consideramos el análisis factorial válido en el estudio de las respuestas a estas cuestiones y nos centramos en los análisis específico y combinado de datos, incluidos en el epígrafe IV.2.

### Análisis Factorial cuestiones 1-3:

Podemos encontrar la tabla de presencia/ausencia para las respuestas de estas 2 cuestiones en el anexo II y la matriz de correlaciones para las 8 variables correspondientes en el anexo XVII. Se puede observar que el determinante de dicha matriz de correlaciones es muy bajo y que tanto el KMO como el nivel de significación de la prueba de esfericidad de Bartlett son aceptables y permiten asegurar la fiabilidad del análisis.

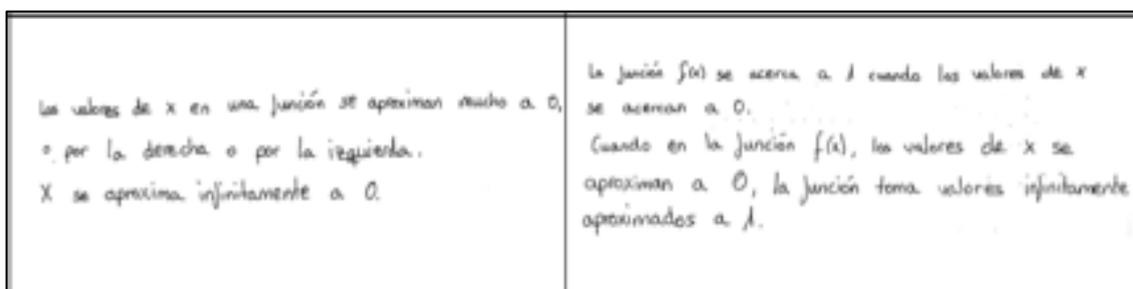
A partir de la matriz de componentes rotados, interpretamos los 3 factores que explican un 66,84% de la varianza total:

COMPONENTE 1 (C13C1): Las variables que más peso factorial tienen sobre este primer componente para las cuestiones 1 y 3 son REF1, REF2, REF3 y REF4. Los alumnos cuyas respuestas vengan caracterizadas por este factor son aquellos que *asocian a la noción de tendencia el término aproximación y la relativizan respecto a otras aproximaciones considerándola la mejor aproximación*. Esto lo hacen tanto en una como en dos variables, además *tienen en cuenta aproximaciones por ambos lados*.

El gráfico radial correspondiente a este factor es como el de los alumnos 3 ó 4 (anexo IX). Las respuestas del alumno 4 a las cuestiones 1 y 3 fueron:

Figura 4.19

*Respuestas del alumno 4 a las cuestiones 1 y 3*

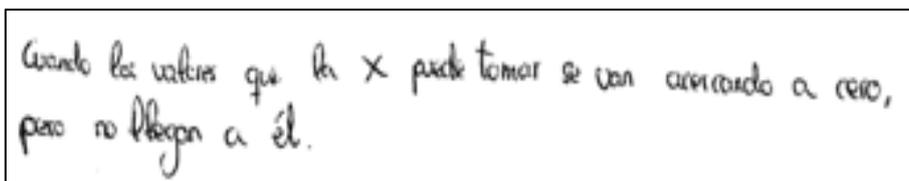


COMPONENTE 2 (C13C2): Las variables de mayor peso factorial ahora son REF1 y, sobre todo, REF5. Se trata de respuestas que *hablan de aproximaciones pero sin llegar a alcanzar*.

El gráfico radial correspondiente a este factor es como el de los alumnos 18 ó 21(anexo IX). Las respuestas del alumno 18 a las cuestiones 1 y 3 fueron:

Figura 4.20

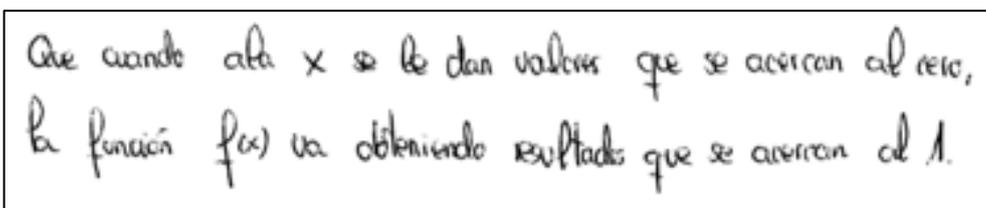
*Respuesta del alumno 18 a la cuestión 1*



Quando los valores que la  $x$  puede tomar se van acercando a cero, pero no llegan a él.

Figura 4.21

*Respuesta del alumno 18 a la cuestión 3*



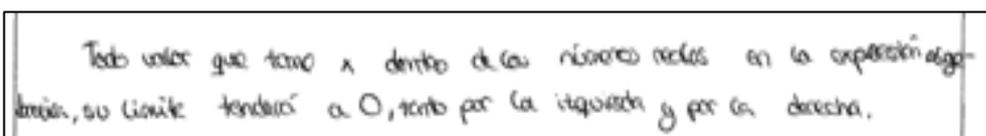
Que cuando a la  $x$  se le dan valores que se acercan al cero, la función  $f(x)$  va obteniendo resultados que se acercan al 1.

COMPONENTE 3 (C13C3): En este último componente el mayor peso corresponde a la variable REF8. Son respuestas que *se basan casi en exclusiva en algoritmos de cálculo de límites*.

El gráfico radial correspondiente a este factor es similar al del alumno 12 (anexo IX). Las respuestas de este alumno a las cuestiones 1 y 3 fueron:

Figura 4.22

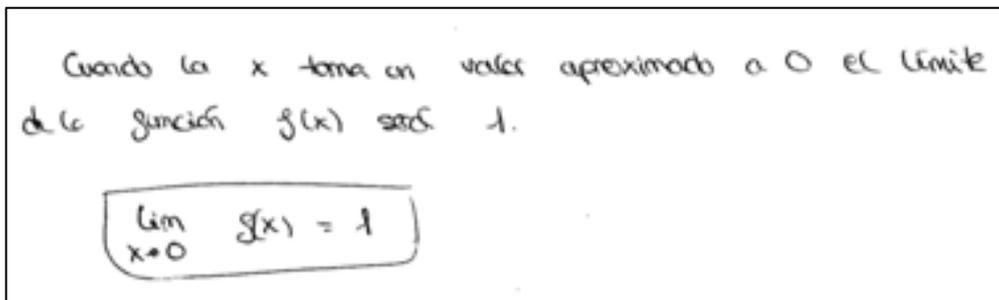
*Respuesta del alumno 12 a la cuestión 1*



Todo valor que tome  $x$  dentro de los números reales en la expresión alguna, su límite tenderá a 0, tanto por la izquierda y por la derecha.

Figura 4.23

Respuesta del alumno 12 a la cuestión 3



#### Análisis Factorial cuestiones 2-4:

La tabla de presencia/ausencia para las respuestas a estas 2 cuestiones está en el anexo II y la matriz de correlaciones para las 8 variables en el anexo XVIII. Se puede observar que el determinante de dicha matriz de correlaciones es muy bajo y que el nivel de significación en la prueba de esfericidad de Bartlett está por debajo de 0,05. Por su parte el indicador KMO es de 0,471, el cual está muy próximo a 0,5. Así que continuamos con el análisis factorial e interpretamos los factores extraídos.

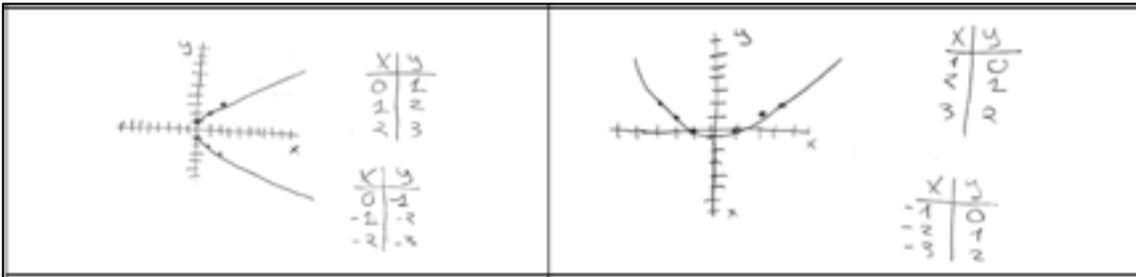
A partir de la matriz de componentes rotados, describimos sus 3 primeros factores, que explican un 66,91% de la varianza total:

COMPONENTE 1 (C24C1): En este primer componente, las variables que tienen mayor peso factorial son SIG1, SIG3 y SIG9. Por tanto, caracterizaría respuestas de alumnos que *representan tendencia en una variable de manera gráfica y tabular pero apoyándose en una variable dependiente auxiliar*; para tendencia de la función utilizan un sistema de representación gráfico. Siempre *llevan a cabo una doble aproximación*.

El gráfico radial tipo de este componente es el del alumno 7 (anexo X). Las respuestas de este alumno a las cuestiones 2 y 4 fueron:

Figura 4.24

Respuestas del alumno 7 a las cuestiones 2 y 4



COMPONENTE 2 (C24C2): En este caso las variables que más influyen son SIG5, SIG11 y, en menor medida, SIG3. Estamos ante alumnos que, en tendencia con una o dos variables, usan un sistema de representación simbólico con 2 aproximaciones, aunque también pueden incluir el sistema de representación gráfico al ser cuestionados por la tendencia en una variable.

El gráfico radial tipo de este componente es el del alumno 12 (anexo X). Las respuestas de este alumno a las cuestiones 2 y 4 fueron:

Figura 4.25

Respuesta del alumno 12 a la cuestión 2

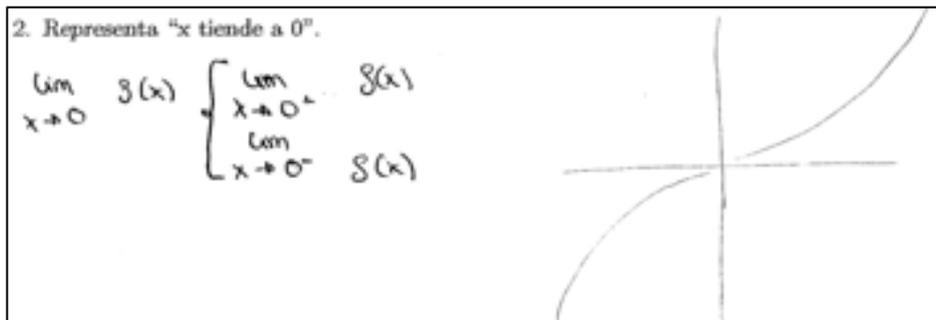
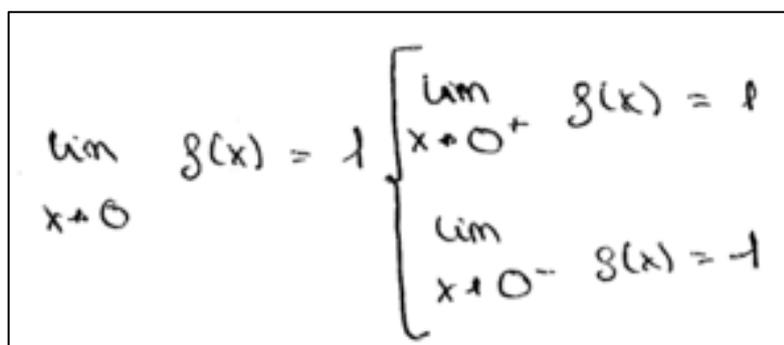


Figura 4.26

Respuesta del alumno 12 a la cuestión 4

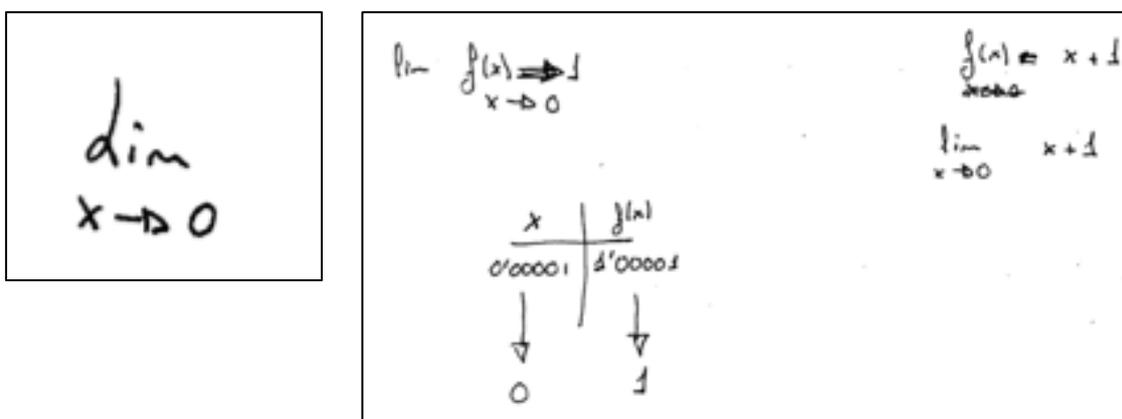


COMPONENTE 3 (C24C3): Tienen mayor peso factorial las variables SIG8 y SIG12. Es decir, este factor agrupa aquellas respuestas que para tendencia de la función *usan tanto un sistema de representación tabular como simbólico con una única aproximación.*

El gráfico radial tipo de este componente es el del alumno 20 (anexo X). Las respuestas de este alumno a las cuestiones 2 y 4 fueron:

Figura 4.27

*Respuestas del alumno 20 a las cuestiones 2 y 4*



#### IV.6 AF de actividades de preguntas individuales

En este epígrafe se incorporan al estudio los análisis factoriales de cada una de las cuestiones tratadas, individualmente. De estos 4 análisis, sólo 2 de ellos cumplen con los mínimos exigibles para los indicadores de validez contemplados (determinante mínimo, KMO alrededor de 0,5 y nivel de significación en la prueba de esfericidad de Bartlett por debajo de 0,05).

##### Análisis Factorial de la cuestión 1:

La tabla de presencia/ausencia para esta cuestión se encuentra en el anexo II. La matriz de correlaciones para las 8 variables junto con el resto de datos del AF están en el anexo XI. En cuanto a los indicadores de fiabilidad, el determinante de la matriz de correlaciones es muy bajo, el índice KMO está por encima de 0,5 y el nivel de significación en la prueba de esfericidad de Bartlett está por debajo de 0,05.

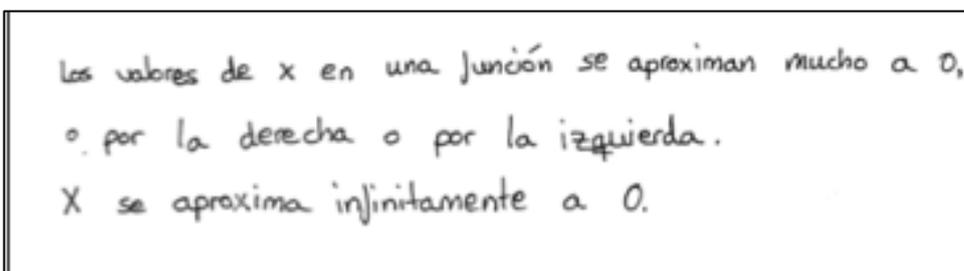
El AF extrae 3 componentes que explican un 67,94% de la varianza total.

COMPONENTE 1 (C1C1): En este primer componente, las variables que tienen mayor peso factorial son REF2, REF3 y REF4. Esta componente engloba aquellas respuestas que entienden *tendencia en una variable como la mejor aproximación posible y que usan aproximaciones por la izquierda y por la derecha.*

El gráfico radial tipo de este componente es el del alumno 4 (anexo III). La respuesta de este alumno a la cuestión 1 fue:

Figura 4.28

*Respuesta del alumno 4 a la cuestión 1*



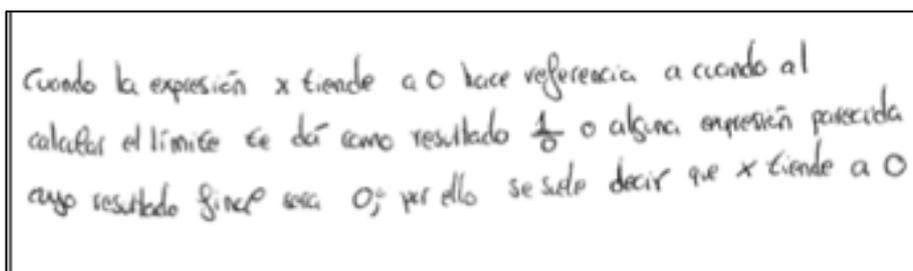
Los valores de  $x$  en una función se aproximan mucho a 0,  
o por la derecha o por la izquierda.  
 $x$  se aproxima infinitamente a 0.

COMPONENTE 2 (C1C2): Las variables más influyentes son REF8 y en menor medida REF3. Esta componente caracteriza respuestas que *utilizan algoritmos de cálculo de límite para definir tendencia en una variable.*

El gráfico radial tipo de este componente es el del alumno 10 (anexo III). La respuesta de este alumno a la cuestión 1 fue:

Figura 4.29

*Respuesta del alumno 10 a la cuestión 1*



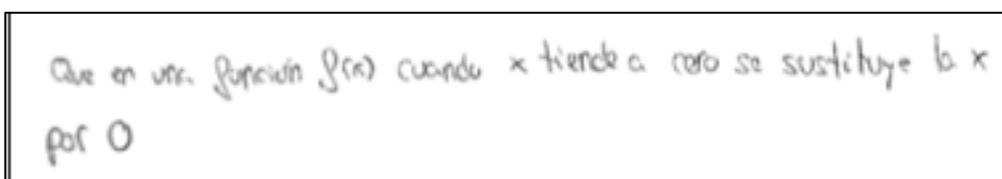
Cuando la expresión  $x$  tiende a 0 hace referencia a cuando al  
calcular el límite se da como resultado  $\frac{0}{0}$  o alguna expresión parecida  
cuyo resultado  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ; por ello se solo decir que  $x$  tiende a 0

COMPONENTE 3 (C1C3): En este componente los mayores pesos factoriales corresponden a las variables REF6 y REF7. Se trata de alumnos que en la definición de tendencia en una variable *usan expresiones como “sustituir en”, “la función vale”... y, además, se apoyan en una variable dependiente auxiliar.*

El gráfico radial tipo de este componente es el de los alumnos 23 ó 25 (anexo III). La respuesta del alumno 23 a la cuestión 1 fue:

Figura 4.30

*Respuesta del alumno 12 a la cuestión 1*



#### Análisis Factorial de la cuestión 2:

La tabla de presencia/ausencia para esta cuestión se encuentra en el anexo II. La matriz de correlaciones para las 4 variables junto con el resto de datos del AF están en el anexo XII. En cuanto a los indicadores de fiabilidad, el determinante de la matriz de correlaciones es bajo, el índice KMO está por encima de 0,5 y el nivel de significación en la prueba de esfericidad de Bartlett está por debajo de 0,05.

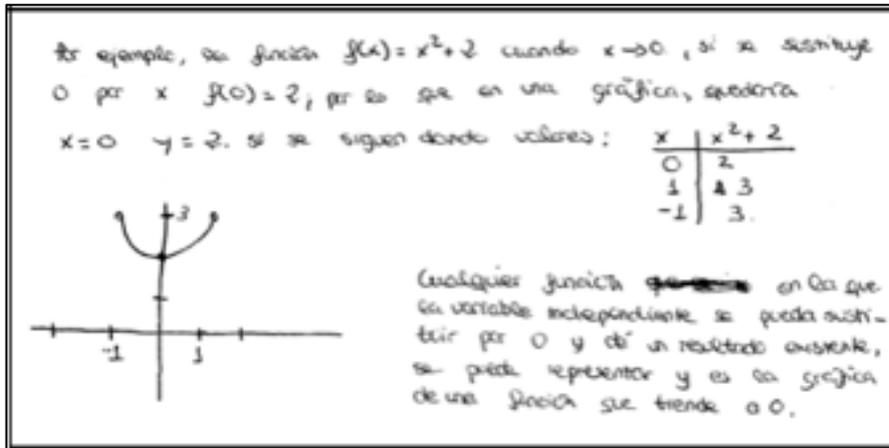
El AF extrae 2 componentes que explican un 77,65% de la varianza total.

COMPONENTE 1 (C2C1): En este primer componente, las variables que tienen mayor peso factorial son SIG1, SIG3 pero sobre todo SIG5. Son respuestas que *se apoyan en la variable dependiente para representar la tendencia de la variable independiente y que además lo hacen con protagonismo del sistema de representación gráfico, acompañado por el tabular y el simbólico. Siempre con la doble aproximación.*

El gráfico radial tipo de este componente es similar al de los alumnos 9 ó 12 (anexo IV). La respuesta del alumno 9 a la cuestión 2 fue:

Figura 4.31

Respuesta del alumno 9 a la cuestión 2

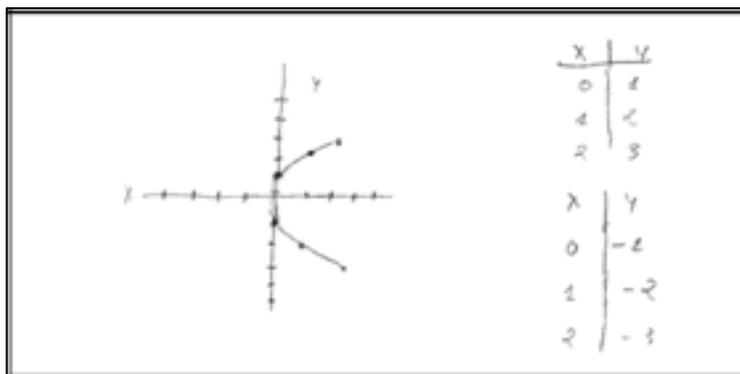


COMPONENTE 2 (C2C2): Ahora, la variable más influyente es SIG1, de forma exclusiva. Son respuestas en las que aparece el *sistema de representación tabular con dos variables y dos aproximaciones* para tratar de representar tendencia en una variable.

El gráfico radial tipo de este componente es similar al alumno 16 (anexo IV). La respuesta de este alumno a la cuestión 2 fue:

Figura 4.32

Respuesta del alumno 16 a la cuestión 2



### Análisis Factorial cuestión 3:

Podemos encontrar la tabla de presencia/ausencia para las respuestas de esta cuestión en el anexo II y la matriz de correlaciones para las 7 variables en el anexo XIII. Se puede observar que el determinante de dicha matriz de correlaciones es bajo y que el índice KMO está por encima del 0,5. Sin embargo, el nivel de significación en la prueba de esfericidad de Bartlett (0,104) está fuera de los valores que indican que el análisis factorial es fiable. Por tanto no consideraremos el análisis factorial válido en el estudio de las respuestas a esta cuestión y nos centraremos en los análisis específico y combinado incluidos en el epígrafe IV.2.

### Análisis Factorial cuestión 4:

Podemos encontrar la tabla de presencia/ausencia para las respuestas de esta cuestión en el anexo II y la matriz de correlaciones para las 4 variables en el anexo XIV. Se puede observar que el determinante de dicha matriz de correlaciones es alto y que tanto el índice KMO como el nivel de significación en la prueba de esfericidad de Bartlett están fuera de los valores que indican que el análisis factorial es fiable. Por tanto no consideraremos el análisis factorial válido en el estudio de las respuestas a esta cuestión y nos centraremos en los análisis específico y combinado incluidos en el epígrafe IV.2.

## **IV.7 Descripción de singularidades**

A lo largo del estudio han ido apareciendo una serie de casos particulares que hemos denominado *singularidades*. En total hemos identificado 5 singularidades, de las cuales 4 de ellas corresponden a variables de tipo signo, cuya representación en la tabla de presencia/ausencia tienen frecuencias menores que 2. La otra singularidad alberga respuestas a las cuestiones 1 y 2 en las que se ha usado algún tipo de representación que no se apoya en una función auxiliar para representar la tendencia de la variable independiente. A continuación, se describen cada una de ellas prestando especial atención a la primera:

## SING1: Discriminan una sola variable en convergencia en 1 variable

Al analizar las respuestas de los alumnos a la cuestión 2, observamos que muchos de ellos incluyen una función auxiliar en la que se apoyan para representar la tendencia en la variable independiente. Por ello, consideramos aquellas respuestas que no lo hacen dentro de esta primera singularidad.

Analizaremos las respuestas de 7 alumnos, de los cuales, unos usan en exclusiva un sistema de representación en el que no aparece la función para representar la tendencia de la variable independiente (alumnos 6, 7, 17 y 18); mientras que otros, también añaden la función para completar la representación (alumnos 4, 5 y 22).

Los clasificamos según el sistema de representación usado:

- *Sistema de representación simbólico*

Dentro de esta categoría tenemos tres tipos de alumnos:

- Aquellos que combinan este sistema de representación con otros sistemas en los que sí emplean una variable dependiente auxiliar (alumnos 4 y 5):

Figura 4.33

*Respuesta del alumno 4 a la cuestión 2*

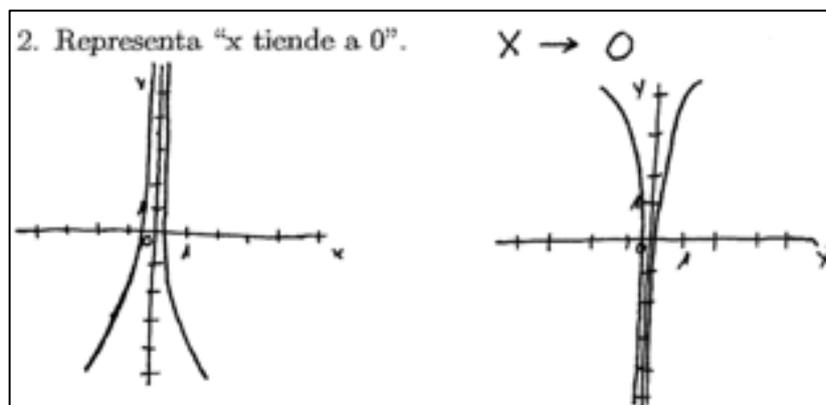
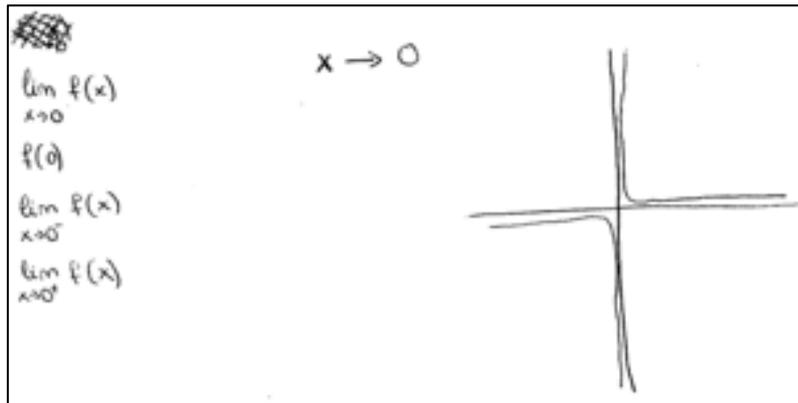


Figura 4.34

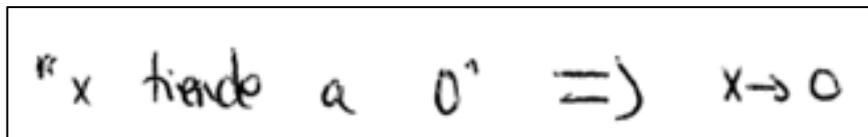
Respuesta del alumno 5 a la cuestión 2



- Aquellos alumnos que usan sólo este sistema de representación en exclusiva (alumno 6):

Figura 4.35

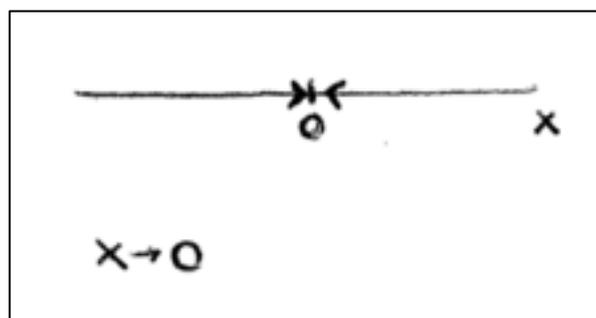
Respuesta del alumno 6 a la cuestión 2



- Aquellos alumnos que usan este sistema de representación y lo acompañan de otro gráfico pero sin apoyarse en una función auxiliar para expresar la tendencia de la variable independiente (alumno 17):

Figura 4.36

Respuesta del alumno 17 a la cuestión 2



- Sistema de representación gráfico

Vamos a distinguir si usan doble aproximación o simple:

- Aquellos alumnos que usan una doble aproximación (alumnos 7, 17 y 18):

Figura 4.37

Respuesta del alumno 7 a la cuestión 2

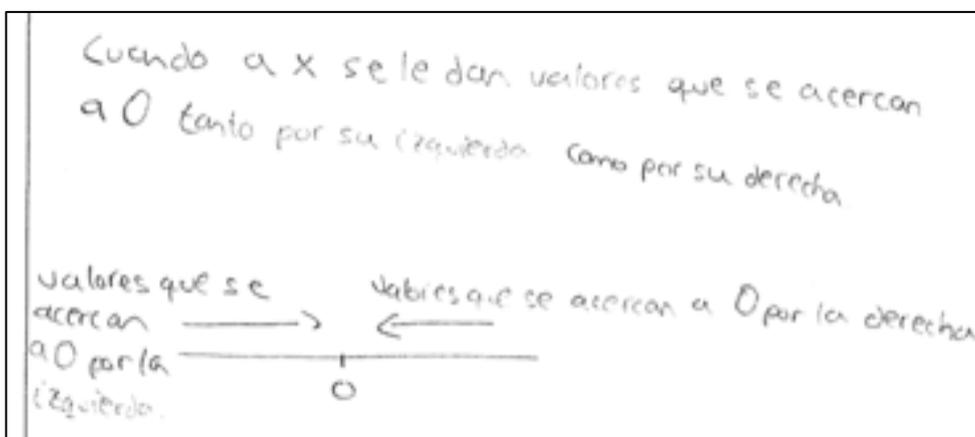


Figura 4.38

Respuesta del alumno 17 a la cuestión 2

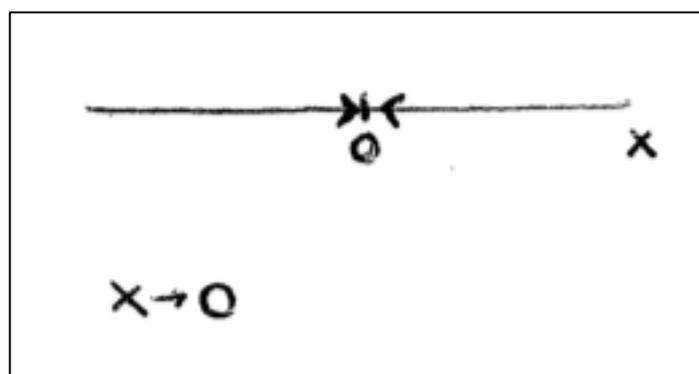
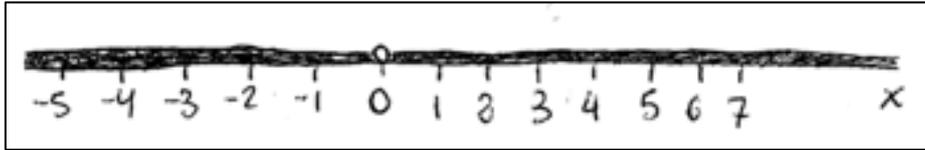


Figura 4.39

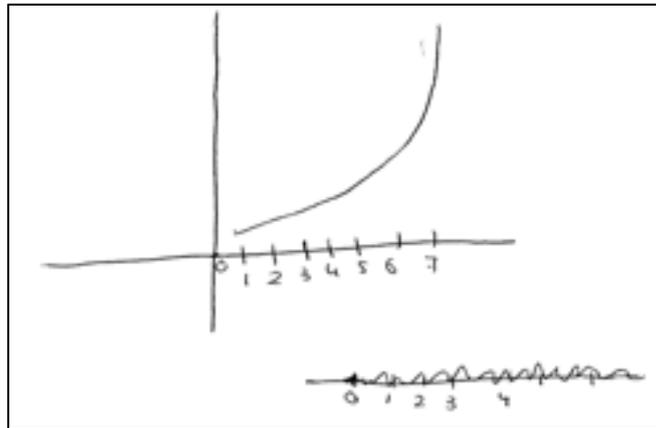
*Respuesta del alumno 18 a la cuestión 2*



- Aquellos alumnos que usan una única aproximación (alumno 22):

Figura 4.40

*Respuesta del alumno 22 a la cuestión 2*

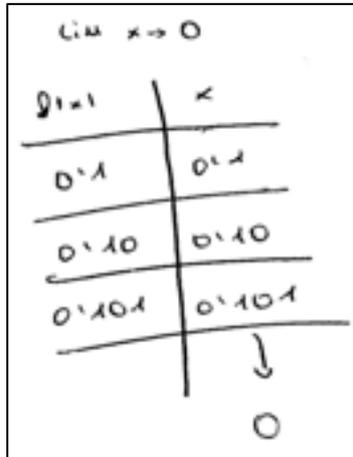


SING2: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable, mediante la función identidad, y usan el Sistema de Representación Tabular con 1 aproximación

Esta singularidad queda prácticamente descrita por su denominación. El alumno cuya respuesta genera esta singularidad es el 1:

Figura 4.41

*Respuesta del alumno 1 a la cuestión 2*

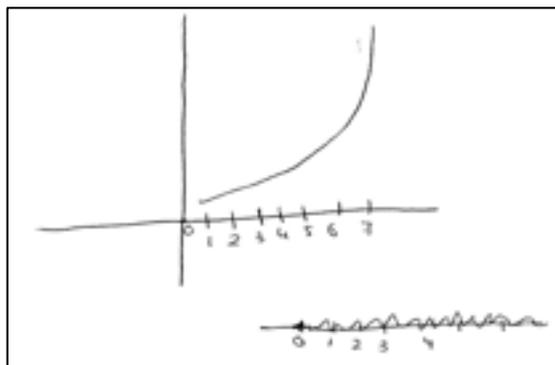


SING3: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 1 aproximación

El alumno que genera esta singularidad es el 22 a partir de la primera representación:

Figura 4.42

*Respuesta del alumno 22 a la cuestión 2*



SING4: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables, igualmente con apoyo de una función simétrica respecto al eje de ordenadas, y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones

Los alumnos que generan esta singularidad son el 1 y el 7:

Figura 4.43

Respuesta del alumno 1 a la cuestión 4

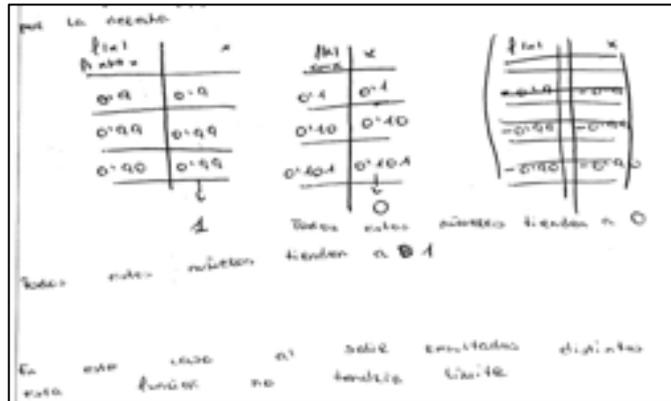
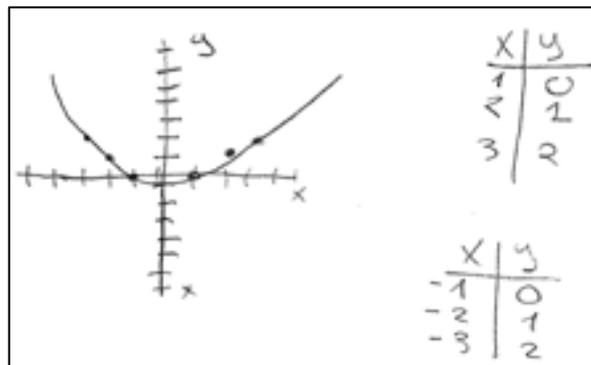


Figura 4.44

Respuesta del alumno 7 a la cuestión 4

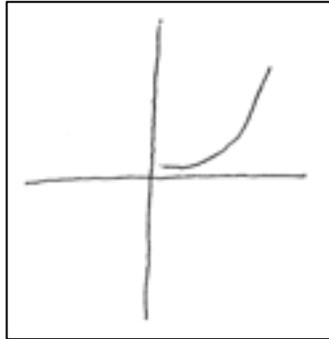


SING5: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Gráfico con 1 aproximación

En este último caso, el alumno que genera la singularidad es el 8:

Figura 4.45

*Respuesta del alumno 8 a la cuestión 4*



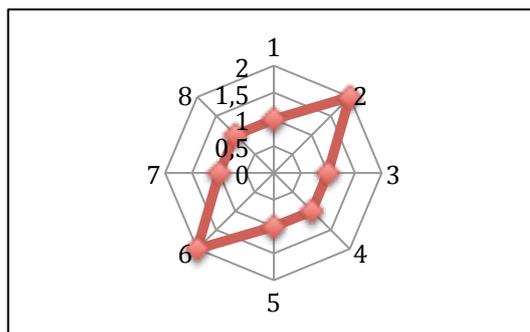
#### IV.8 Descripción de perfiles

Uno de los objetivos de la investigación es encontrar perfiles de alumnos atendiendo a las respuestas que dan a las cuestiones propuestas. Para comenzar a intuir dichos perfiles, usamos los gráficos radiales incluidos en los anexos III a X, en los que los vértices de los polígono representan las variables definidas en este epígrafe.

Así, atendiendo al anexo X podemos observar cómo los alumnos 4 y 23 comparten un gráfico radial con marcas de esta forma:

Figura 4.46

*Gráfico radial con marcas de los alumnos 4 y 23*



Es decir, en las respuestas de ambos a las cuestiones 2 y 4 interpretamos que aparecen las variables SIG3 y SIG9:

- *SIG3: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones*

- *SIG9: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones*

Pero además tendríamos que tener en cuenta que el alumno 4 es uno de los que presenta la singularidad de tipo 1:

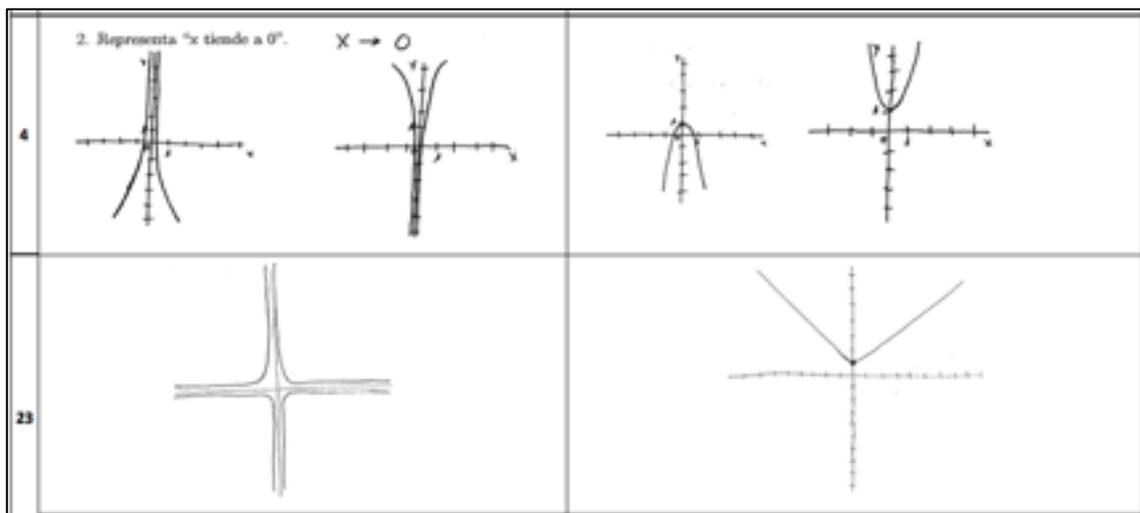
- *SIG1: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones*

Por tanto, las respuestas de estos dos alumnos a las cuestiones 2 y 4 se pueden considerar en un mismo perfil, pero concretando la aparición de una singularidad de tipo 1 en la respuesta a la cuestión 2 del alumno 4.

Las respuestas de los alumnos 4 y 23 a estas 2 cuestiones fueron:

Figura 4.47

*Respuestas de los alumnos 4 y 23 a las cuestiones 2 y 4*



Pese a que intuitivamente los gráficos radiales con marcas nos pueden ayudar, pretendemos describir perfiles de una forma más rigurosa. Para ello vamos a partir de los AF realizados.

Una vez se han extraído los factores mediante el AF, suele ser interesante obtener una estimación de las puntuaciones de los sujetos en cada uno de dichos factores resultantes.

Esto se hace con el fin de valorar y comparar la situación relativa de cada uno de los sujetos mediante las nuevas dimensiones, que permiten resumir la información que ofrecen las variables originales.

Hay que tener en cuenta que el programa SPSS proporciona las puntuaciones factoriales en formato diferencial, por lo que la puntuación 0 se corresponde con una puntuación factorial igual a la media, mientras que las puntuaciones factoriales positivas se encuentran por encima de la media y las puntuaciones negativas son puntuaciones menores a la media.

Para una mejor interpretación de estas puntuaciones factoriales, conviene apoyarse en estadísticos descriptivos de las nuevas variables. En nuestro caso, la media de estos nuevos componentes vale 0 y su desviación típica 1, con lo cual podemos interpretar las soluciones factoriales de los alumnos como si fueran puntuaciones típicas.

Por tanto, para la descripción de perfiles será fundamental la matriz de componentes que surgió a partir de los AF válidos (con indicadores de fiabilidad aceptables). Esta matriz se encuentra en el anexo 19. Debajo de la celda que da nombre a cada componente hemos incluido una breve definición de la misma, atendiendo a los AF realizados con anterioridad. Se han sombreado en verde aquellos pesos factoriales positivos y en rojo los negativos.

Vamos a centrarnos en las puntuaciones factoriales de los AF de pares de actividades, utilizando los AF individuales para matizar resultados. Para clasificar los alumnos, estudiamos el número de puntuaciones por encima de la media para cada uno de ellos:

Tabla 4.5

*Número de componentes con puntuación factorial positiva de cada alumno.*

<b>PF&gt;0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>ALUMNO</b>	-	1*,2,14,	6*,7*,11,	9,13,	8*,10,15,	3,4*,	-	12	24
		18*,19	21,22*	17*, 26	20,23,25	5*,16			

PF = Puntuaciones factoriales

\*Alumnos que presentan singularidades

Se puede observar que ningún alumno tiene una única puntuación factorial positiva y que la mayoría de ellos (24 de 26) tienen entre 2 y 6 puntuaciones mayores que 0. Esto es indicativo de la riqueza de las respuestas de los estudiantes si son analizadas en base a las componentes extraídas por los distintos AF de pares de actividades.

Si, por otro lado, estudiamos el número de alumnos que obtienen puntuación factorial positiva en cada componente (exclusivamente aparecen las 10 componentes extraídas de los AF válidos de pares de actividades):

Tabla 4.6

*Número de alumnos con puntuación factorial positiva por componente.*

COMPONENTES	C12	C12	C12	C12	C13	C13	C13	C24	C24	C24
	C1	C2	C3	C4	C1	C2	C3	C1	C2	C3
<b>Nº sujetos con PF&gt;0</b>	7	13	12	10	14	12	9	14	7	14

PF = Puntuaciones factoriales

Las componentes con mayor número de PF positivas entre los alumnos son C13C1, C24C1 y C24C3. Recordando la descripción de dichos componentes, un estudiante que tuviera PF positivas en los 3 se podría definir como:

- Alumno que, al ser cuestionado por tendencia en una o dos variables, asocia a esta noción el término aproximación y la relativiza respecto a otras aproximaciones considerándola la mejor aproximación posible. Además tiene en cuenta aproximaciones por ambos lados.
- Alumno que representa tendencia en una variable de manera gráfica y tabular pero apoyándose en una variable dependiente auxiliar; y para tendencia de la función utilizan el sistema de representación gráfico con aproximaciones laterales a izquierda y derecha; y los sistemas de representación tabular y simbólico con una única aproximación.

Para la detección y descripción de perfiles recurrimos a aquellas puntuaciones factoriales más altas (cercanas a +2) de este modo:

- Un primer perfil (P1) lo constituyen aquellos alumnos cuyas PF destacan en las componentes que hacen referencia a la “mejor aproximación doble” (C13C1, C12C1 e incluso C1C1). En este grupo podríamos incluir a los alumnos 4, 20 y 24. Estos estudiantes entienden la noción de tendencia en una o dos variables como *la mejor aproximación posible, llevando a cabo aproximaciones laterales tanto por izquierda como por derecha*. En cuanto a la forma de representación dicha noción, *se decantan por el sistema gráfico o simbólico*, con escasa presencia del tabular.
- Un segundo perfil (P2) lo conforman aquellos alumnos que al ser cuestionados por tendencia, *usan el cálculo de límites tanto en una como en dos variables*. Las componentes en las que obtienen mayor PF son C12C4, C13C3 y para los AF de cuestiones de forma individual, C1C2. Pertenecen a este perfil los alumnos 10, 12, 15 y 16, quienes, además de las referencias a los algoritmos de cálculo de límites en las descripciones verbales, *utilizan de forma mayoritaria el sistema de representación simbólico* para dar respuesta a las cuestiones 2 y 4.
- En el tercer perfil (P3), podríamos situar a los alumnos 2, 9, 23 y 25. En este caso los estudiantes usan términos o expresiones como “sustituir por”, “el valor es” o similares (C12C2 y C1C3). Aparte de la *identificación entre límite e imagen*, estos individuos *se apoyan preferentemente en el sistema de representación simbólico* para representar la noción de tendencia, aunque es destacable el caso del alumno 23 que sólo usa representaciones gráficas, tanto en la cuestión 2 como en la 4.
- El cuarto perfil (P4) está compuesto por aquellos alumnos que mencionan *expresiones equivalentes al término “alcanzar”* en la respuesta a la cuestión 1. Se trata de los sujetos 1, 18 y 21. Mientras que el alumno 1 se decanta por el sistema de representación tabular y el 12 utiliza el simbólico, el alumno 18 usa el sistema de representación gráfico en lo que supone una singularidad de tipo 1 que analizamos en el epígrafe anterior.

Mediante estos 4 perfiles se caracterizan 14 alumnos del total de 26, en los que predomina uno solo de los perfiles . El resto de alumnos parecen estar descritos por más de un perfil atendiendo a sus PF máximas. La siguiente tabla muestra que en 10 alumnos predomina una combinación de P1 y P3 y observamos la escasa presencia de P2 y P4:

Tabla 4.7

*Clasificación de alumnos según su perfil principal y secundario.*

		PERFIL PRINCIPAL			
		P1	P2	P3	P4
PERFIL SECUNDARIO	P1	4*,20,24	19	5*,6*,11,13,14	-
	P2	-	10,12,15,16	26	-
	P3	3,7*,8*,17*,22*	-	2,9,23,25	-
	P4	-	-	-	1*,18*,21

\*Alumnos que presentan singularidades

Los perfiles P1 y P3 tienen mayor peso como principales, mientras que el perfil P2 apenas se presenta combinado. Así, el alumno 19 resulta peculiar ya que estaría influenciado por las características del perfil P2 prioritariamente, pero también por las del perfil P1, si bien de forma secundaria. Del mismo modo resulta peculiar el alumno 26, pero respecto a los perfiles P3 como principal y P2 como secundario. El perfil P4 no se presenta en combinación con ningún otro.

## V. CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN

El fin de este epígrafe es recopilar y resumir las conclusiones obtenidas a partir del trabajo llevado a cabo en los apartados anteriores en lo que se refiere a la detección y descripción de perfiles y singularidades, las limitaciones surgidas y sugerencias de continuidad en próximos estudios.

Al comienzo de este estudio se enunció su objetivo principal, que no es otro que detectar y describir grupos de alumnos cuyas respuestas al cuestionario sobre tendencia permitieran encuadrarlos bajo un mismo perfil; como aquellos otros cuyas respuestas, por su baja frecuencia o por sus peculiaridades, consideramos como singulares.

Hemos revisado la literatura previa relacionada con el concepto de límite al que está vinculada la noción de tendencia. Hemos realizado análisis conceptuales de los términos asociados al anterior concepto y que han sido decisivos en la interpretación y análisis de las respuestas dadas.

A partir de la implementación de un cuestionario semántico en un aula de primer curso de bachillerato, hemos trabajado sobre las respuestas a 4 ítems que hacen referencia a la noción de tendencia. En primer lugar, identificamos aquéllas unidades de información que al amparo de la revisión de la literatura y de nuestro conocimiento sobre la materia nos parecieron destacables. En un segundo paso, sintetizamos dichos términos en una serie de temas que permitieron definir un conjunto de variables, que calificamos de referencia o de signo según hubieran sido obtenidas del análisis de las cuestiones 1 y 3 (“Explica...”) o de las cuestiones 2 y 4 (“Representa...”), respectivamente.

Como herramienta metodológica más importante hemos usado la técnica del análisis factorial para reducir el número de variables de estudio según un número menor de componentes. Éstas nuevas variables han permitido una detección más sencilla y fundamentada de distintos perfiles de alumnos en base a las respuestas que dieron en su día al instrumento.

A lo largo del proceso de análisis previo a los distintos análisis factoriales se han caracterizado las singularidades de nuestro estudio y se han descrito las mismas.

En términos generales podemos decir que se han cumplido los objetivos parciales fijados, y por tanto el objetivo general, ya que hemos conseguido identificar y definir perfiles y singularidades a partir de los análisis respectivos. Especialmente reseñables nos parecen dos hallazgos de la investigación. En primer lugar la no aparición en las respuestas de los alumnos del término “rebasar”, que sí se ha encontrado en trabajos previos acerca del concepto de límite. En segundo lugar, dentro de las singularidades, el hecho de que la mayor parte de los alumnos no sean capaces de representar la tendencia de una variable independiente a un determinado valor sin introducir una función auxiliar dependiente de dicha variable.

Hemos reconocido también ciertas limitaciones del estudio. Por el tamaño de la muestra la consecución de unos índices de fiabilidad adecuados en la implementación de la técnica del análisis factorial se ha visto condicionada.

Por último, se sugieren distintas líneas de investigación que den continuidad y completen el estudio.

## V.1 Conclusiones referentes a los perfiles

Teniendo en cuenta el epígrafe IV.8 del presente estudio, las conclusiones más destacables en torno a los perfiles descritos son:

- El hecho de que en la caracterización de las variables haya influido la revisión de la literatura anterior provoca, en parte, que en la definición de los perfiles aparezcan aspectos de la literatura revisada en relación al concepto de límite.

En el primer perfil (P1) la unidad de información principal es la expresión “la mejor aproximación” o una equivalente. El término “aproximarse”; junto a otros relacionados con límite como “tender a”, “converger” o el propio “límite”; ya aparecen en los estudios de Monaghan (1991). Blázquez y Ortega (2009) incluyen en su trabajo la diferencia entre las expresiones “aproximarse” y “tender a”.

En el segundo perfil (P2), encontramos aquellas respuestas en las que aparecen algoritmos de cálculo de límites o referencias a los mismos; y en el tercer perfil (P3), los sujetos utilizan expresiones del tipo “dar el valor” o “sustituir en”. Ambas circunstancias pudieran incluirse dentro de uno de los aspectos estructurales relacionados con el concepto de límite de Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico, y Castro (2013), en concreto, del “aspecto estructural destrezas prácticas de cálculo”.

En el cuarto perfil (P4), se mencionan expresiones equivalentes a “alcanzar”. Junto a “rebasar”, este término se incluye también en el aspecto estructural “alcanzabilidad y rebasabilidad” (Fernández-Plaza et al. 2013).

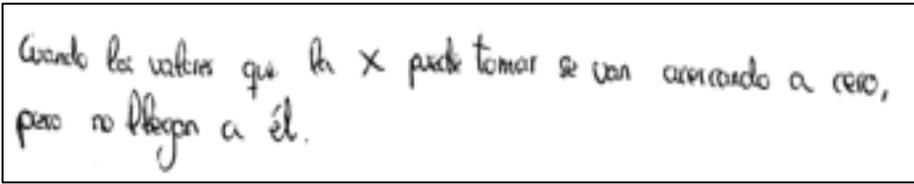
- Continuando con el punto anterior, como hemos destacado en el avance de este epígrafe V, el término “rebasar” no aparece en ninguna de las respuestas de los alumnos a este cuestionario. En la literatura acerca del concepto de límite finito de una función en un punto revisada, este término estaba muy asociado al de “alcanzar”. A pesar de que sí interpretamos en las respuestas de algunos individuos la propiedad de límite como cota inalcanzable (Fernández-Plaza et

al., 2013), en este cuestionario semántico sobre la noción de tendencia (de una variable y de una función) el término “rebasar” no está presente.

- En cuanto al perfil P1, parece interesante que el sistema de representación con menos presencia haya sido el tabular, ya que sí lo podemos encontrar en las distintas introducciones del concepto de límite en los libros de texto.
- En los perfiles P2 y P3, relativos al uso de algoritmos de cálculo de límites y de expresiones características de la identificación límite/imagen respectivamente, el sistema de representación más usado es el simbólico.
- Dentro del cuarto perfil (P4) encontramos el alumno 18, cuya respuesta a la cuestión 2 estaba catalogada como singularidad en el epígrafe IV.7. Las respuestas de este alumno a las dos primeras cuestiones son:

Figura 5.1

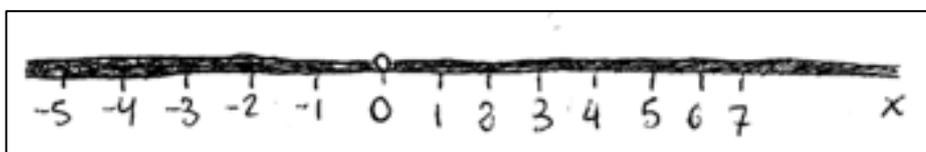
*Respuesta del alumno 18 a la cuestión 1*



Quando los valores que la  $x$  puede tomar se van acercando a cero, pero no llegan a él.

Figura 5.2

*Respuesta del alumno 18 a la cuestión 2*



Nuestra interpretación es que este alumno representa la propiedad de no alcanzabilidad mediante un gráfico lineal con una única variable “ $x$ ” y dejando un hueco en el punto “0”, que evoca un sentido topológico.

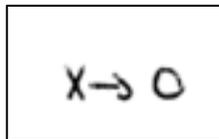
## V.2 Conclusiones referentes a las singularidades

Las conclusiones de mayor calado en relación a las singularidades son:

- La detección de la primera singularidad ya supone una conclusión en sí misma. La mayor parte de los alumnos usan una función auxiliar a la hora de representar la tendencia en una sola variable. En su mayoría no conciben la convergencia de una variable si no contemplan una función que dependa de tal variable y que, a su vez, converja.
- Dentro de esta primera singularidad, los 4 sujetos que usan el sistema de representación simbólico (alumnos 4, 5, 6 y 17), muestran un cierto consenso en que la forma de representar mediante dicho sistema la tendencia en una variable es:

Figura 5.3

*Representación simbólica de tendencia de una variable más usada por los alumnos*



Mientras que para el sistema de representación gráfico existen variantes. Si se recurre a la doble aproximación, en las representaciones de los alumnos 7 y 17 interpretamos que las flechas otorgan una orientación física de aproximación:

Figura 5.4

*Respuesta del alumno 7 a la cuestión 2*

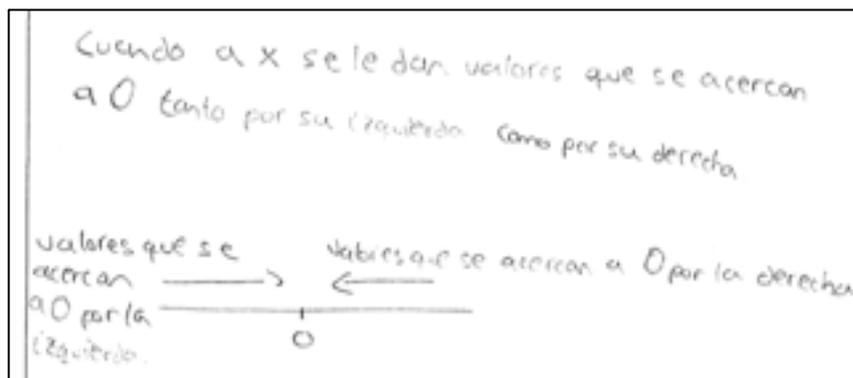
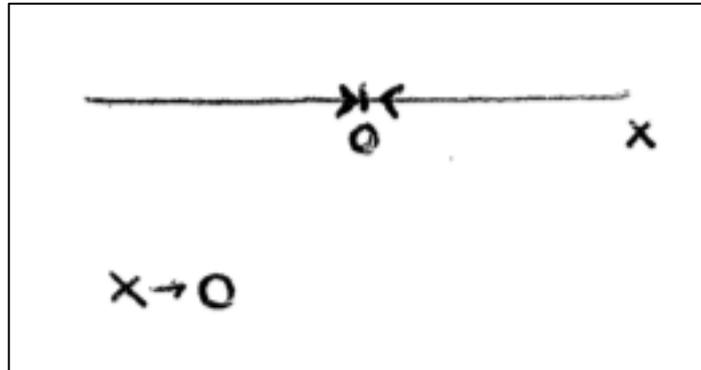


Figura 5.5

*Respuesta del alumno 17 a la cuestión 2*

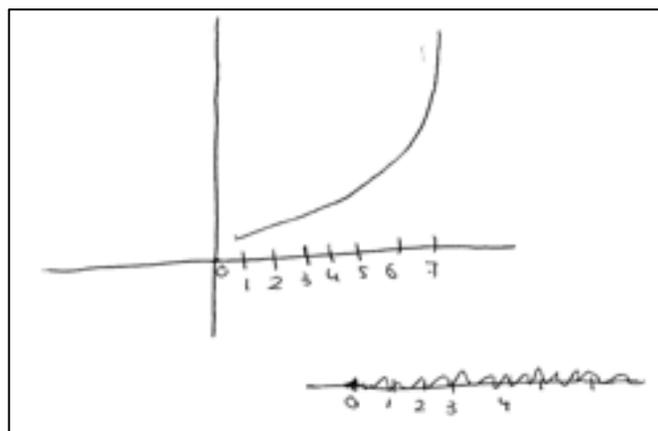


Por otro lado, ya hemos comentado que la representación del alumno 18 evoca un sentido topológico, de entorno reducido, por el hueco en el punto de abscisa  $x=0$  (ver epígrafe V.1)

Por último, si se recurre a la aproximación única (alumno 22), de nuevo la presencia de la flecha indica movimiento, aproximaciones sucesivas al 0:

Figura 5.6

*Respuesta del alumno 22 a la cuestión 2*



### **V.3 Limitaciones de la investigación**

La primera limitación destacable ya la hemos avanzado: el tamaño reducido de la muestra, intencional y por disponibilidad, dificulta la obtención de unos índices de fiabilidad mínimos que garanticen la validez de los distintos AF.

El hecho de que no se haya podido recoger información en distintas fases del proceso de enseñanza-aprendizaje imposibilita la evaluación de los cambios que, a lo largo del aprendizaje de la noción de tendencia en relación al concepto de límite finito de una función en un punto, pudieran haberse producido en los alumnos.

Por último, el cuestionario podría incluir algún ítem acerca del sentido del concepto. Dentro del triángulo de significado es el único aspecto que no se ha tratado y según Rico (2007), es un paso previo a la modelización y resolución de problemas.

### **V.4 Sugerencias para futuras investigaciones**

En relación al final del último epígrafe (V.3), este estudio se centra en la relación referencia-signo dentro del significado de un concepto matemático, o en este caso, de una noción como la de tendencia asociada a un concepto como el de límite finito de una función en un punto. La incorporación del estudio del sentido enriquecería el análisis de las respuestas de los alumnos y cerraría las distintas conexiones referencia-signo-sentido dentro del marco teórico presentado en este trabajo.

Otra posible investigación futura sería diseñar, implementar y evaluar una innovación curricular dentro de la metodología de la investigación-acción, para la enseñanza de a noción de tendencia en una y dos variables con alumnos de 1º de bachillerato.

# ANEXOS

## ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO 0. CUESTIONARIO

ANEXO I. TABLA GENERAL DE RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS. EJEMPLO DE OBSERVACIONES.

ANEXO II. TABLAS DE PRESENCIA/AUSENCIA Y VARIABLES

ANEXO III. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIÓN 1

ANEXO IV. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIÓN 2

ANEXO V. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIÓN 3

ANEXO VI. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIÓN 4

ANEXO VII. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIONES 1 Y 2

ANEXO VIII. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIONES 3 Y 4

ANEXO IX. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIONES 1 Y 3

ANEXO X. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIONES 2 Y 4

ANEXO XI. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIÓN 1

ANEXO XII. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIÓN 2

ANEXO XIII. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIÓN 3

ANEXO XIV. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIÓN 4

ANEXO XV. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIONES 1-2

ANEXO XVI. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIONES 3-4

ANEXO XVII. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIONES 1-3

ANEXO XVIII. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIONES 2-4

ANEXO XIX. MATRIZ DE COMPONENTES Y SINGULARIDADES



Departamento de Didáctica de la Matemática

Grupo FQM-193. "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico"

## **Cuestionario de Matemáticas**

Tendencia de una variable. Límite de una función en un punto

Estimado alumno/a,

Hemos diseñado este cuestionario como parte de una investigación que está llevando a cabo la Universidad de Granada.

Tu opinión e información serán muy útiles para nosotros. En el cuestionario que vas a realizar, inicialmente te solicitamos algunos datos personales. A continuación tendrás que realizar unas tareas relacionadas con la idea de tendencia de una variable y de límite de una función en un punto.

Te sugerimos estas indicaciones antes de seguir adelante:

1. No se trata de una prueba de evaluación. Realízalo con tranquilidad e interés.
2. Tus respuestas serán confidenciales.
3. Procura responder a todas las preguntas.
4. Imagina que un compañero/a va a leer tus respuestas, por tanto, procura incluir todas las aclaraciones necesarias para que entienda sin dificultad lo que quieres expresar.
5. Si te equivocas, tacha la respuesta (una raya) y corrígela aparte.

Gracias por tu colaboración.

#### **Datos personales**

1. Género:  Masculino     Femenino
2. Edad:
3. Curso:  1<sup>o</sup>     2<sup>o</sup>  
 Bachillerato de Ciencias y Tecnología  
 Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales
4. ¿Qué notas sueles sacar en los exámenes de matemáticas?
5. ¿Cuál fue tu última calificación en matemáticas?

Responde a las siguientes cuestiones:

**Considera que  $x$  es una variable real.**

1. Explica con tus propias palabras cómo entiendes la expresión:

" $x$  tiende a 0".

2. Representa " $x$  tiende a 0".

Considera que  $f(x)$  es una función de variable real.

3. Explica con tus propias palabras cómo entiendes la expresión:

" $f(x)$  tiende a 1 cuando  $x$  tiende a 0".

4. Representa " $f(x)$  tiende a 1 cuando  $x$  tiende a 0".

ANEXO I. TABLA GENERAL DE RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS. EJEMPLO DE OBSERVACIONES.

Se incluye a continuación una captura de pantalla de los 5 primeros alumnos en la tabla en la que se descargaron las respuestas de los alumnos:

1	2	3	4
<p>Considera que <math>f(x)</math> es una función de variable real</p> <p>Definición con sus propios palabras cómo entendió la expresión "límite a 0"</p>	<p>Apoyante "límite a 0"</p>	<p>Considera que <math>f(x)</math> es una función de variable real</p> <p>Apoyante "límite a 1 cuando <math>x</math> tiende a 0"</p>	<p>Apoyante "límite a 1 cuando <math>x</math> tiende a 0"</p>
<p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Representación gráfica entera</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Ejemplo: <math>\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0</math></p>	<p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Representación gráfica entera por la izquierda y por la derecha</p>
<p>Considera variable dependiente en variable</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Consideración variable dependiente en variable</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Consideración variable dependiente en variable</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Representación gráfica entera solo por un lado</p>
<p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Representación gráfica entera solo por un lado</p>
<p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Representación gráfica entera solo por un lado</p>
<p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p> <p>Use de aproximaciones por la derecha y por la izquierda</p> <p>Use de "abrazadillas"</p>	<p>Representación gráfica entera solo por un lado</p>

Se pueden observar bajo las respuestas las primeras anotaciones realizadas. Un ejemplo de estas observaciones lo encontramos en la respuesta del alumno 17 a la primera cuestión (*Explica con tus propias palabras cómo entiendes la expresión “ $x$  tiende a 0”*):

<b>17</b>	<p>El valor de un número <math>x</math> se aproxima a 0, bien siendo más grande o más chico. Por ejemplo 0,0002, 0,00002 el número cada vez está más cerca de 0 por la derecha. O también -1,9999, -1,99999 cada vez están más cerca de 0 por la izquierda.</p>
	Uso de "aproximarse a"
	Uso de aproximaciones por la derecha y por la izquierda
	Uso de "más cercano"
	Uso de ejemplos correctos e incorrectos

## ANEXO II. TABLAS DE PRESENCIA/AUSENCIA Y VARIABLES

### Cuestión 1

ALUMNO	REF 1	REF 2	REF 3	REF 4	REF 5	REF 6	REF 7	REF 8
1	1	0	0	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0	1	1	0
3	1	0	0	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	1	0	0	0	0
7	1	0	0	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	0	0	1	0
9	1	0	0	0	0	1	1	0
10	0	0	0	0	0	0	1	1
11	1	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	0	0	0	1
13	1	0	0	0	0	0	0	0
14	1	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	1	1	1
16	0	0	0	0	0	1	0	1
17	1	1	0	1	0	0	0	0
18	1	0	0	0	1	0	0	0
19	1	0	0	0	0	0	0	0
20	1	1	0	1	0	1	0	0
21	0	0	0	0	1	0	0	0
22	1	0	0	0	0	0	1	0
23	0	0	0	0	0	1	1	0
24	1	1	1	1	1	0	0	0
25	0	0	0	0	0	1	1	0
26	0	0	0	0	0	0	1	0
<b>MEDIA</b>	0,69231	0,19231	0,07692	0,34615	0,15385	0,26923	0,38462	0,15385

- REF 1 Presencia de términos/expresiones relacionados con la proximidad o cercanía
- REF 2 Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora a otras
- REF 3 Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora al resto
- REF 4 Presencia de aproximaciones por la derecha y por la izquierda
- REF 5 Presencia de términos/expresiones relativos a la no alcanzabilidad
- REF 6 El alumno usa términos/expresiones como sustituir en, la función vale...
- REF 7 El alumno usa la variable dependiente sin necesidad / El alumno confunde variable dependiente e independiente
- REF 8 El alumno hace referencia a algoritmos de cálculo de límites en la definición

Cuestión 2

ALUMNO	SIG1	SIG3	SIG5	SIG6
1	0	0	0	1
2	0	0	0	1
3	0	1	0	0
4	0	1	0	0
5	0	1	1	0
6	0	0	0	0
7	1	1	0	0
8	0	1	0	0
9	1	1	0	0
10	0	0	0	1
11	0	0	0	0
12	0	1	1	0
13	0	1	0	0
14	0	0	0	1
15	0	0	0	1
16	1	1	0	0
17	0	0	0	0
18	0	0	0	0
19	0	0	0	1
20	0	0	0	0
21	0	0	0	0
22	0	0	0	0
23	0	1	0	0
24	0	1	1	0
25	0	0	0	1
26	0	0	0	1
<b>MEDIA</b>	<b>0,11538</b>	<b>0,42308</b>	<b>0,11538</b>	<b>0,30769</b>

- SIG1 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones
- SIG3 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones
- SIG5 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones
- SIG6 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación

### Cuestión 3

ALUMNO	REF 1	REF 2	REF 3	REF 4	REF 6	REF 7	REF 8
1	1	1	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0
5	1	0	0	1	0	1	0
6	1	1	0	0	1	0	0
7	1	0	0	1	0	1	0
8	1	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	1	1	0
10	0	0	0	0	0	1	0
11	1	1	1	0	1	1	0
12	1	0	0	0	0	0	1
13	1	1	0	0	0	0	0
14	1	1	0	1	0	0	0
15	0	0	0	0	1	0	0
16	1	1	0	0	0	0	1
17	1	1	0	0	1	0	0
18	1	0	0	0	0	0	0
19	1	0	0	0	0	0	1
20	1	0	0	0	1	0	0
21	1	0	0	0	0	0	0
22	1	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	1	0	0
24	1	0	0	0	0	0	1
25	0	0	0	1	1	0	1
26	0	0	0	0	0	1	0
<b>MEDIA</b>	<b>0,73077</b>	<b>0,34615</b>	<b>0,15385</b>	<b>0,19231</b>	<b>0,34615</b>	<b>0,23077</b>	<b>0,19231</b>

- REF 1 Presencia de términos/expresiones relacionados con la proximidad o cercanía
- REF 2 Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora a otras
- REF 3 Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora al resto
- REF 4 Presencia de aproximaciones por la derecha y por la izquierda
- REF 6 El alumno usa términos/expresiones como sustituir en, la función vale...
- REF 7 El alumno usa la variable dependiente sin necesidad / El alumno confunde variable dependiente e independiente
- REF 8 El alumno hace referencia a algoritmos de cálculo de límites en la definición

Cuestión 4

ALUMNO	SIG8	SIG9	SIG11	SIG12
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	0	0	0
4	0	1	0	0
5	0	0	1	0
6	0	0	0	1
7	0	1	0	0
8	0	0	0	0
9	1	1	0	1
10	0	0	0	1
11	0	1	0	1
12	0	0	1	0
13	0	1	0	0
14	0	0	1	0
15	0	0	0	1
16	0	0	0	0
17	1	1	0	1
18	1	0	0	0
19	0	0	0	0
20	1	0	0	1
21	0	0	0	1
22	0	1	0	0
23	0	1	0	0
24	0	0	0	1
25	0	0	0	1
26	0	0	0	1
<b>MEDIA</b>	<b>0,23077</b>	<b>0,30769</b>	<b>0,11538</b>	<b>0,42308</b>

- SIG8 Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Tabular con 1 aproximación
- SIG9 Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones
- SIG11 Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones
- SIG12 Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación

## Cuestiones 1 y 2

ALUMNO	REF 1	REF 2	REF 3	REF 4	REF 5	REF 6	REF 7	REF 8	SIG1	SIG3	SIG5	SIG6
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
3	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
6	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
9	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
16	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0
17	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
18	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
19	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
20	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
22	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
24	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
25	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
26	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
<b>MEDIA</b>	0,69231	0,19231	0,07692	0,34615	0,15385	0,26923	0,38462	0,15385	0,11538	0,42308	0,11538	0,30769

- REF 1 Presencia de términos/expresiones relacionados con la proximidad o cercanía
- REF 2 Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora a otras
- REF 3 Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora al resto
- REF 4 Presencia de aproximaciones por la derecha y por la izquierda
- REF 5 Presencia de términos/expresiones relativos a la no alcanzabilidad
- REF 6 El alumno usa términos/expresiones como sustituir en, la función vale...
- REF 7 El alumno usa la variable dependiente sin necesidad / El alumno confunde variable dependiente e independiente
- REF 8 El alumno hace referencia a algoritmos de cálculo de límites en la definición
- SIG1 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones
- SIG3 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones
- SIG5 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones
- SIG6 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación

### Cuestiones 3 y 4

ALUMNO	REF 1	REF 2	REF 3	REF 4	REF 6	REF 7	REF 8	SIG8	SIG9	SIG11	SIG12
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
6	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
7	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1
10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
11	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
12	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
13	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
14	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
15	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
16	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
17	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
18	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
19	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
20	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
22	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
23	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
24	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
25	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
26	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
<b>MEDIA</b>	0,73077	0,34615	0,15385	0,19231	0,34615	0,23077	0,19231	0,23077	0,30769	0,11538	0,42308

- REF 1 Presencia de términos/expresiones relacionados con la proximidad o cercanía
- REF 2 Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora a otras
- REF 3 Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora al resto
- REF 4 Presencia de aproximaciones por la derecha y por la izquierda
- REF 6 El alumno usa términos/expresiones como sustituir en, la función vale...
- REF 7 El alumno usa la variable dependiente sin necesidad / El alumno confunde variable dependiente e independiente
- REF 8 El alumno hace referencia a algoritmos de cálculo de límites en la definición
- SIG8 Discriminan 2 variables en convergencia en dos variables y usan el Sistema de Representación Tabular con 1 aproximación
- SIG9 Discriminan 2 variables en convergencia en dos variables y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones
- SIG11 Discriminan 2 variables en convergencia en dos variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones
- SIG12 Discriminan 2 variables en convergencia en dos variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación

Cuestiones 1 y 3

ALUMNO	REF 1	REF 2	REF 3	REF 4	REF 5	REF 6	REF 7	REF 8
1	1	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0	1	1	0
3	1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0
5	1	1	0	1	0	0	1	0
6	1	1	0	1	0	0	0	0
7	1	0	0	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	0	0	1	0
9	1	0	0	0	0	1	1	0
10	0	0	0	0	0	0	1	1
11	1	1	1	0	0	1	1	0
12	1	0	0	1	0	0	0	1
13	1	1	0	0	0	0	0	0
14	1	1	0	1	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	1	1	1
16	1	1	0	0	0	1	0	1
17	1	1	0	1	0	1	0	0
18	1	0	0	0	1	0	0	0
19	1	0	0	0	0	0	0	1
20	1	1	0	1	0	1	0	0
21	1	0	0	0	1	0	0	0
22	1	0	0	0	0	0	1	0
23	0	0	0	0	0	1	1	0
24	1	1	1	1	1	0	0	1
25	0	0	0	1	0	1	1	1
26	0	0	0	0	0	0	1	0
<b>MEDIA</b>	<b>0,80769</b>	<b>0,46154</b>	<b>0,19231</b>	<b>0,46154</b>	<b>0,15385</b>	<b>0,34615</b>	<b>0,46154</b>	<b>0,26923</b>

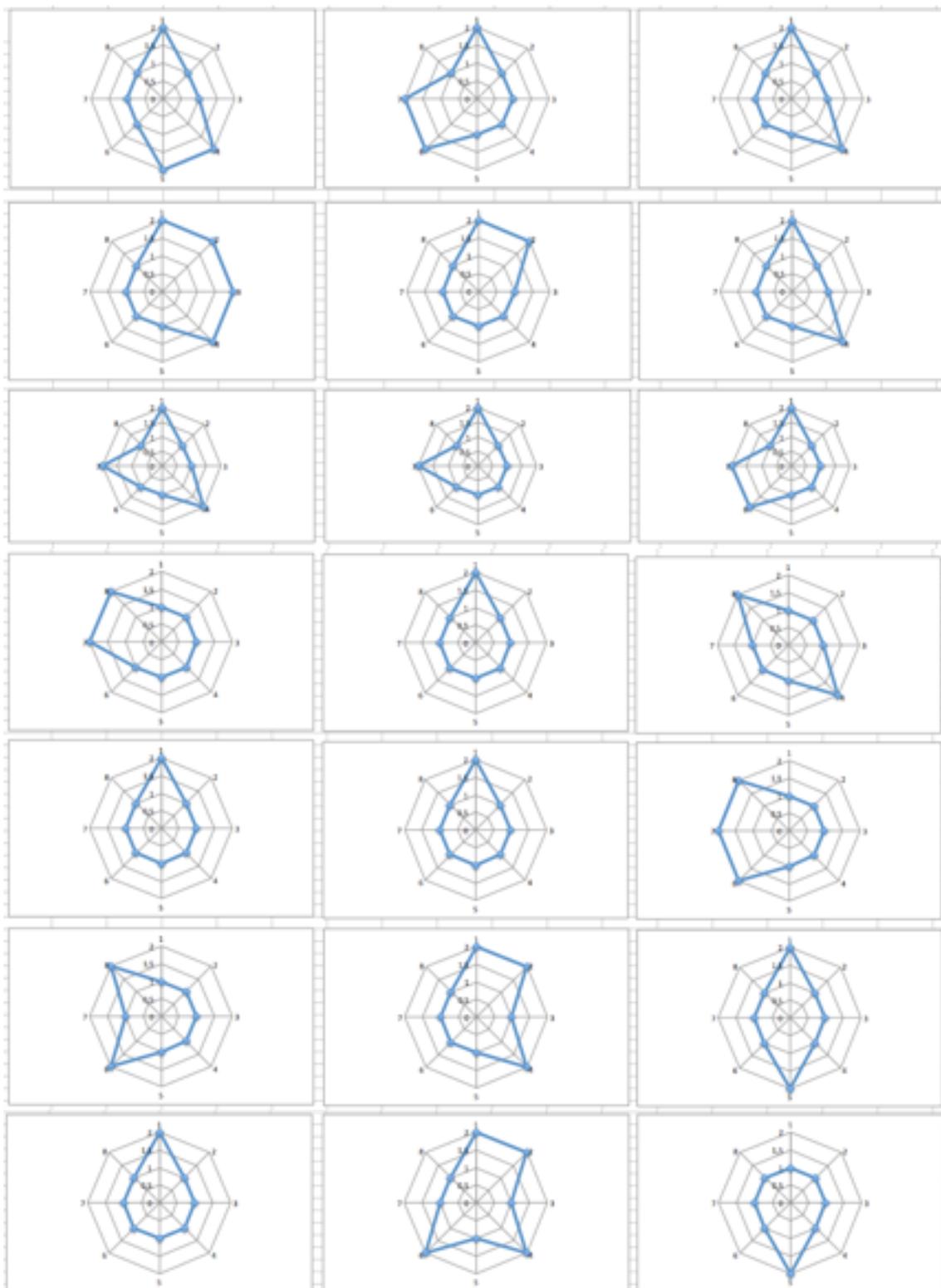
- REF 1 Presencia de términos/expresiones relacionados con la proximidad o cercanía  
REF 2 Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora a otras  
REF 3 Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora al resto  
REF 4 Presencia de aproximaciones por la derecha y por la izquierda  
REF 5 Presencia de términos/expresiones relativos a la no alcanzabilidad  
REF 6 El alumno usa términos/expresiones como sustituir en, la función vale...  
REF 7 El alumno usa la variable dependiente sin necesidad / El alumno confunde variable dependiente e independiente  
REF 8 El alumno hace referencia a algoritmos de cálculo de límites en la definición

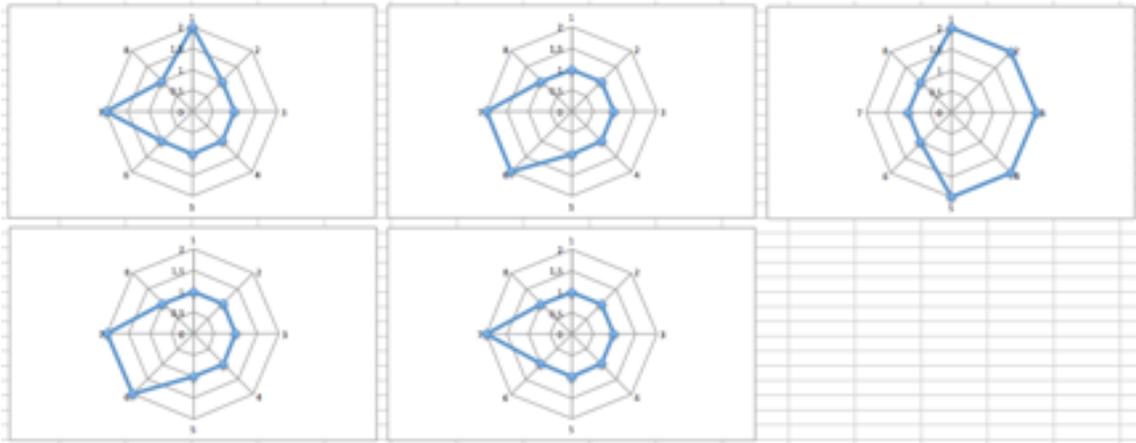
Cuestiones 2 y 4

ALUMNO	SIG1	SIG3	SIG5	SIG6	SIG8	SIG9	SIG11	SIG12
1	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0	0
3	0	1	0	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	1	1	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	1
7	1	1	0	0	0	1	0	0
8	0	1	0	0	0	0	0	0
9	1	1	0	0	1	1	0	1
10	0	0	0	1	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	1	0	1
12	0	1	1	0	0	0	1	0
13	0	1	0	0	0	1	0	0
14	0	0	0	1	0	0	1	0
15	0	0	0	1	0	0	0	1
16	1	1	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	1	1	0	1
18	0	0	0	0	1	0	0	0
19	0	0	0	1	0	0	0	0
20	0	0	0	0	1	0	0	1
21	0	0	0	0	0	0	0	1
22	0	0	0	0	0	1	0	0
23	0	1	0	0	0	1	0	0
24	0	1	1	0	0	0	0	1
25	0	0	0	1	0	0	0	1
26	0	0	0	1	0	0	0	1
<b>MEDIA</b>	<b>0,11538</b>	<b>0,42308</b>	<b>0,11538</b>	<b>0,30769</b>	<b>0,23077</b>	<b>0,30769</b>	<b>0,11538</b>	<b>0,42308</b>

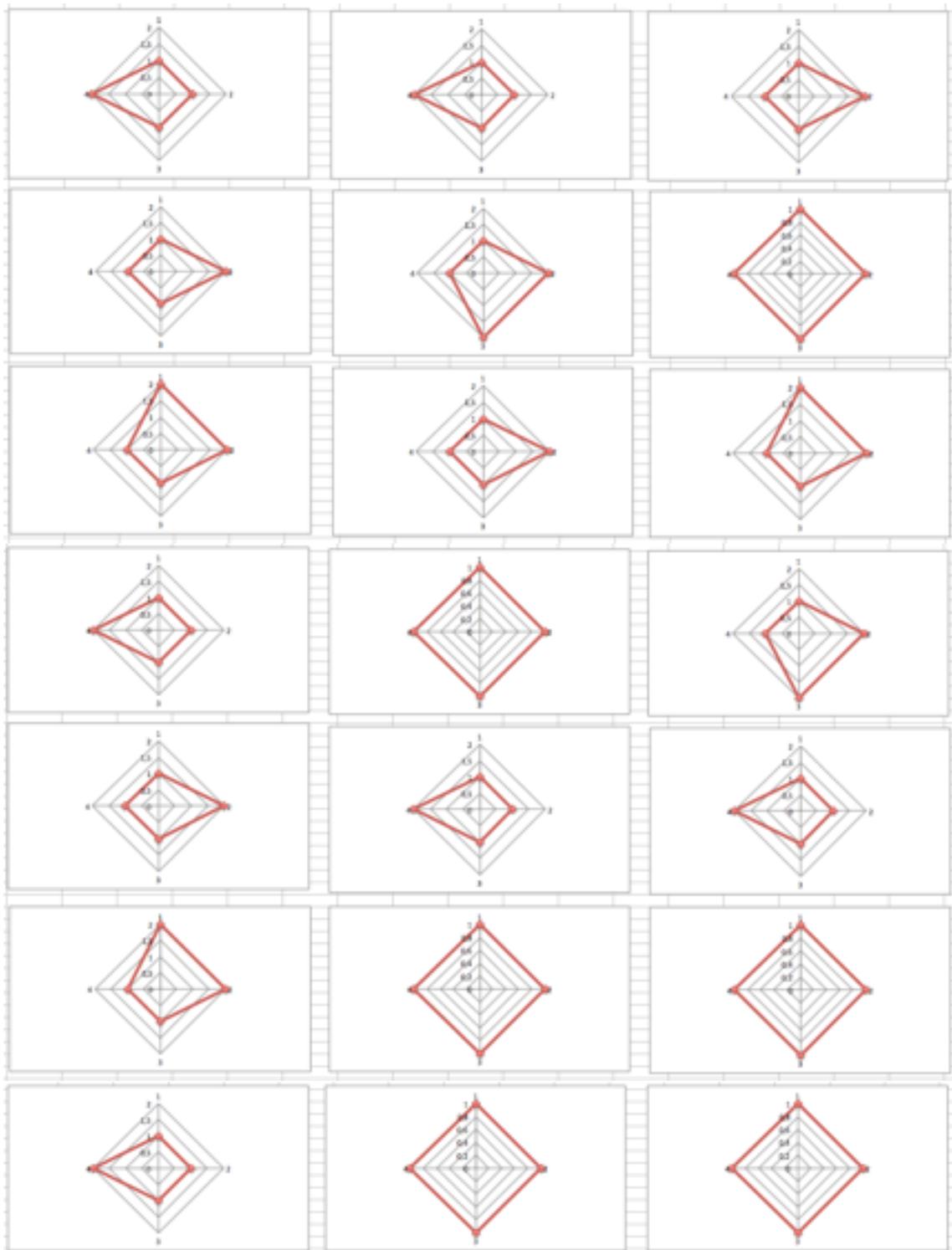
- SIG1 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones
- SIG3 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones
- SIG5 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones
- SIG6 Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación
- SIG8 Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Tabular con 1 aproximación
- SIG9 Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones
- SIG11 Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones
- SIG12 Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación

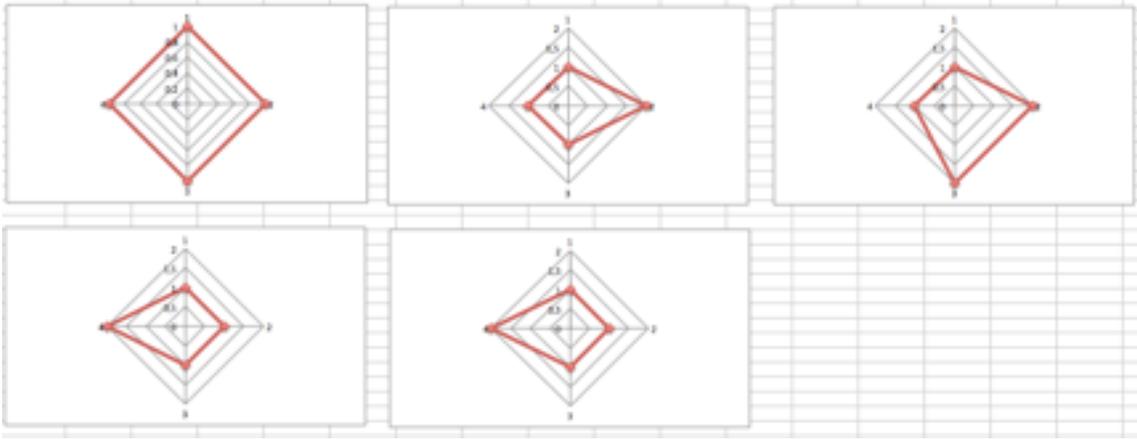
ANEXO III. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIÓN 1



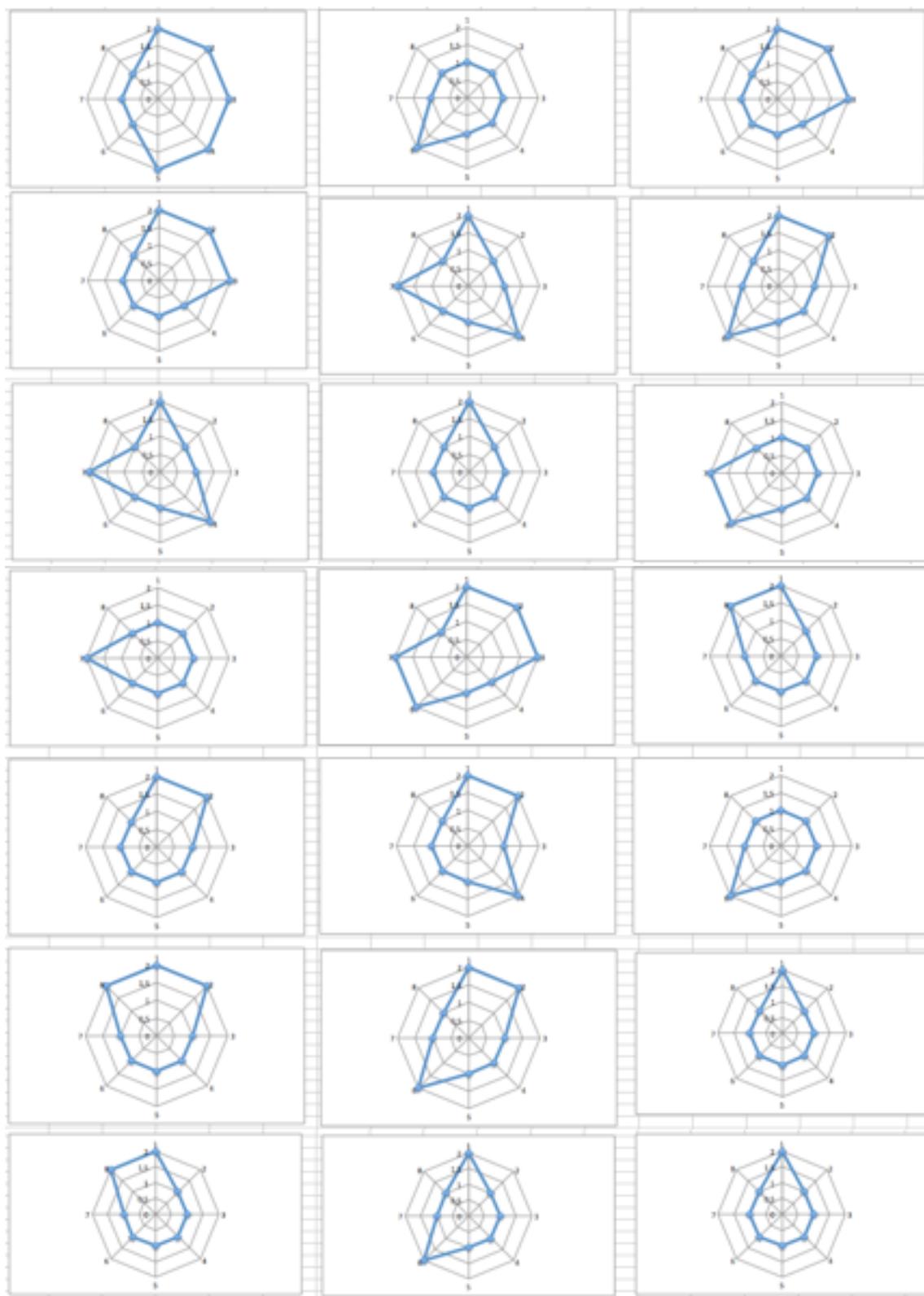


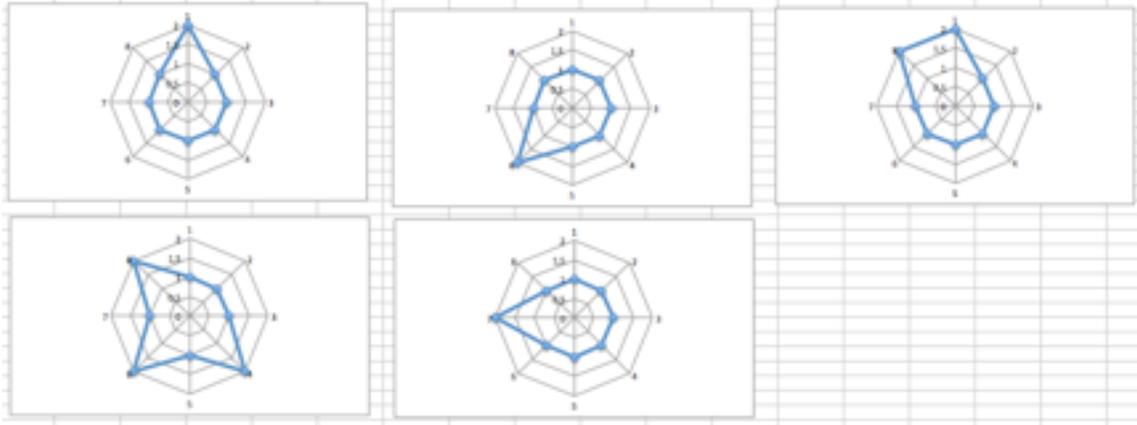
ANEXO IV. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIÓN 2



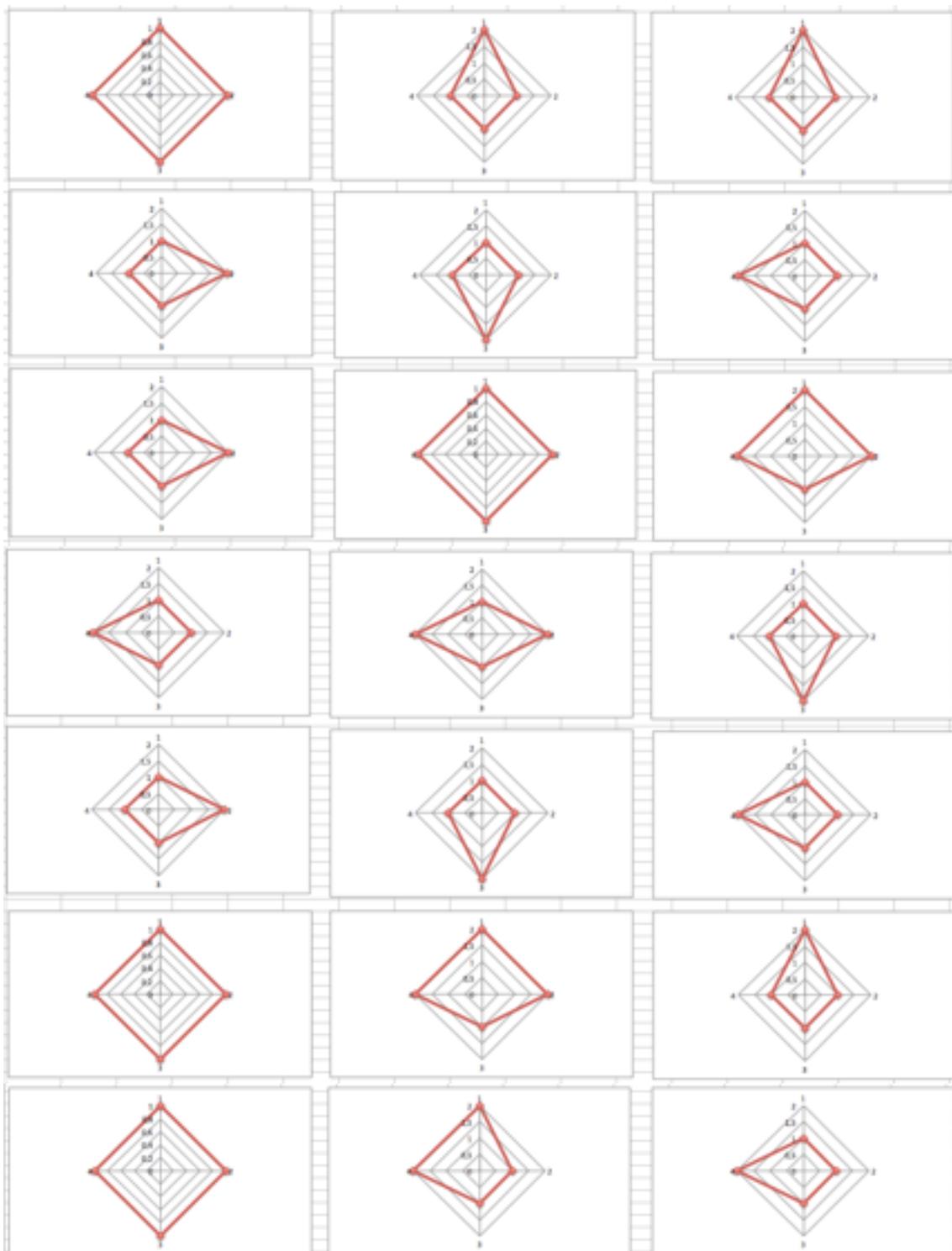


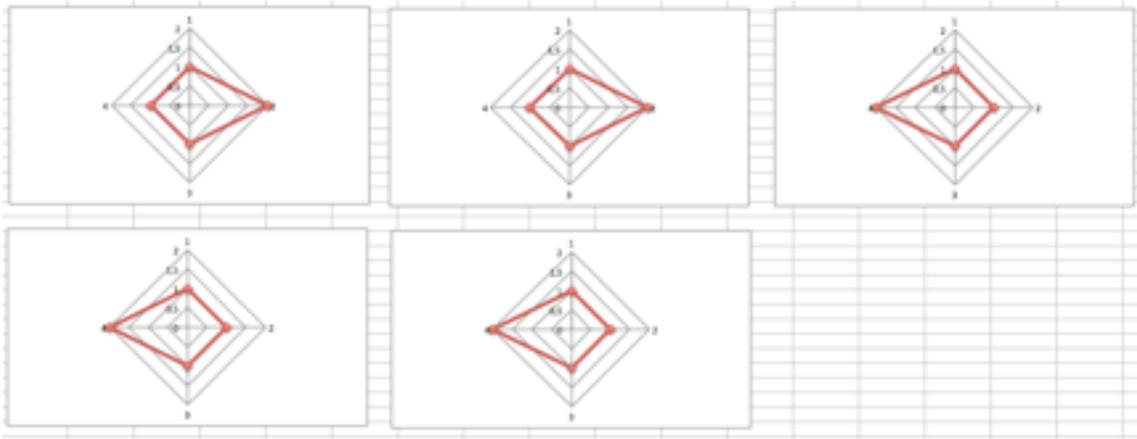
ANEXO V. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIÓN 3



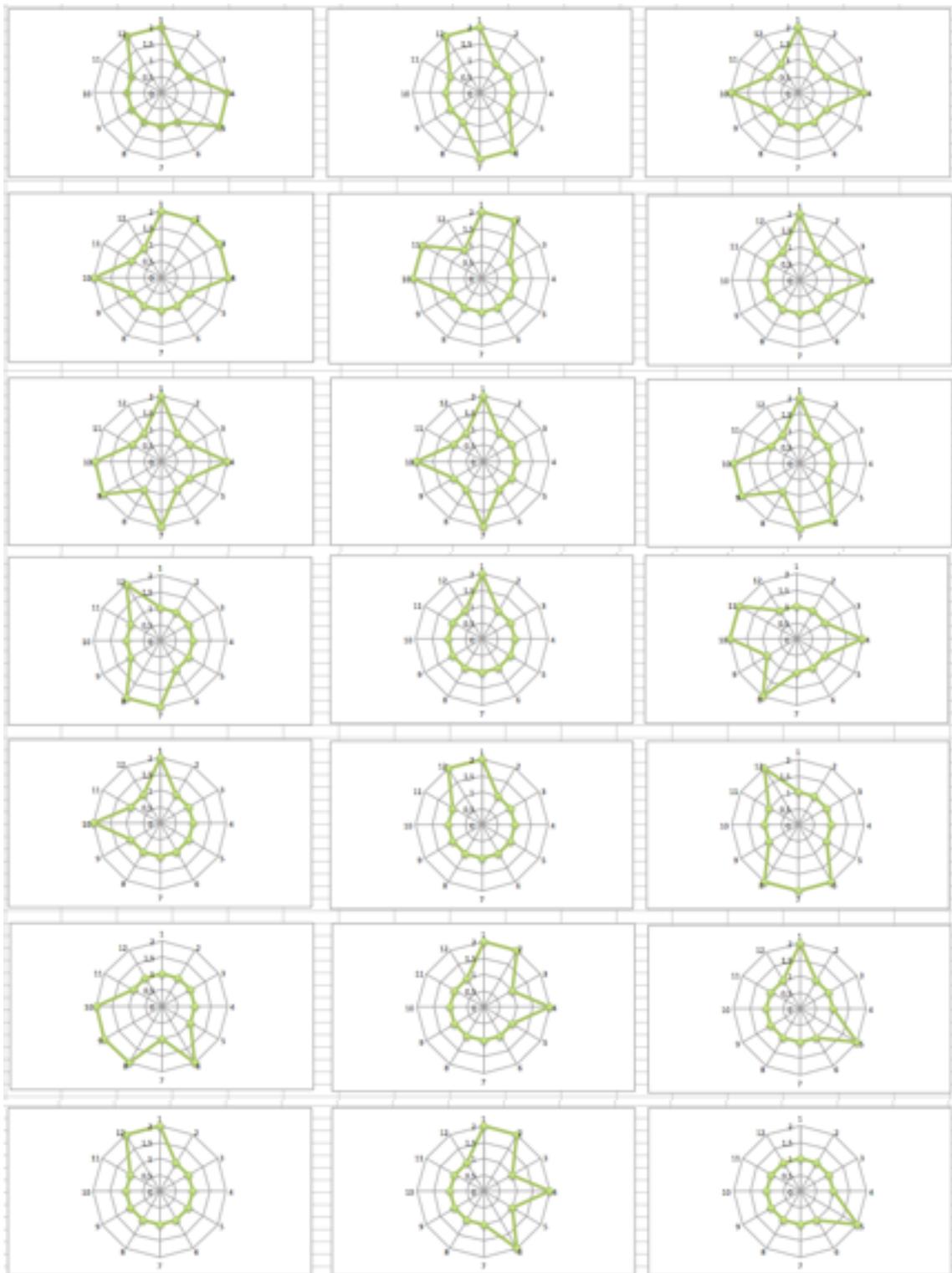


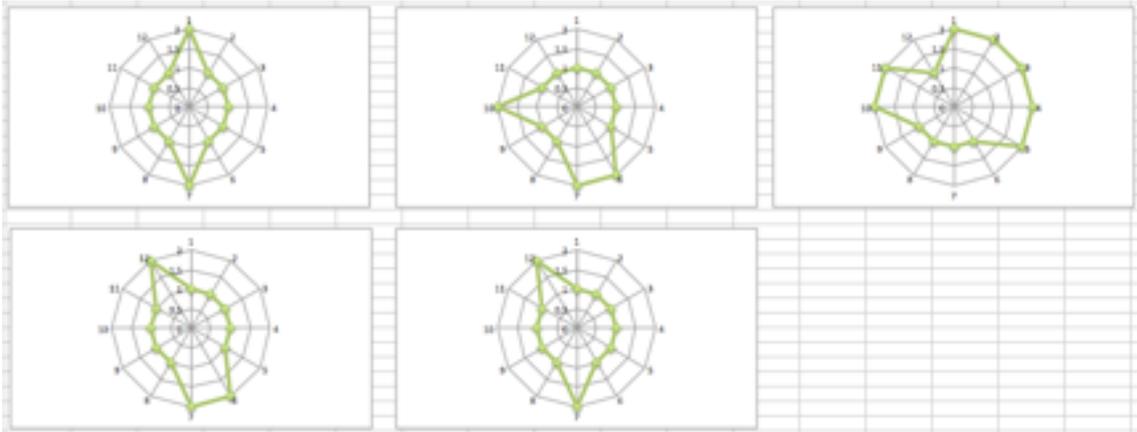
ANEXO VI. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIÓN 4



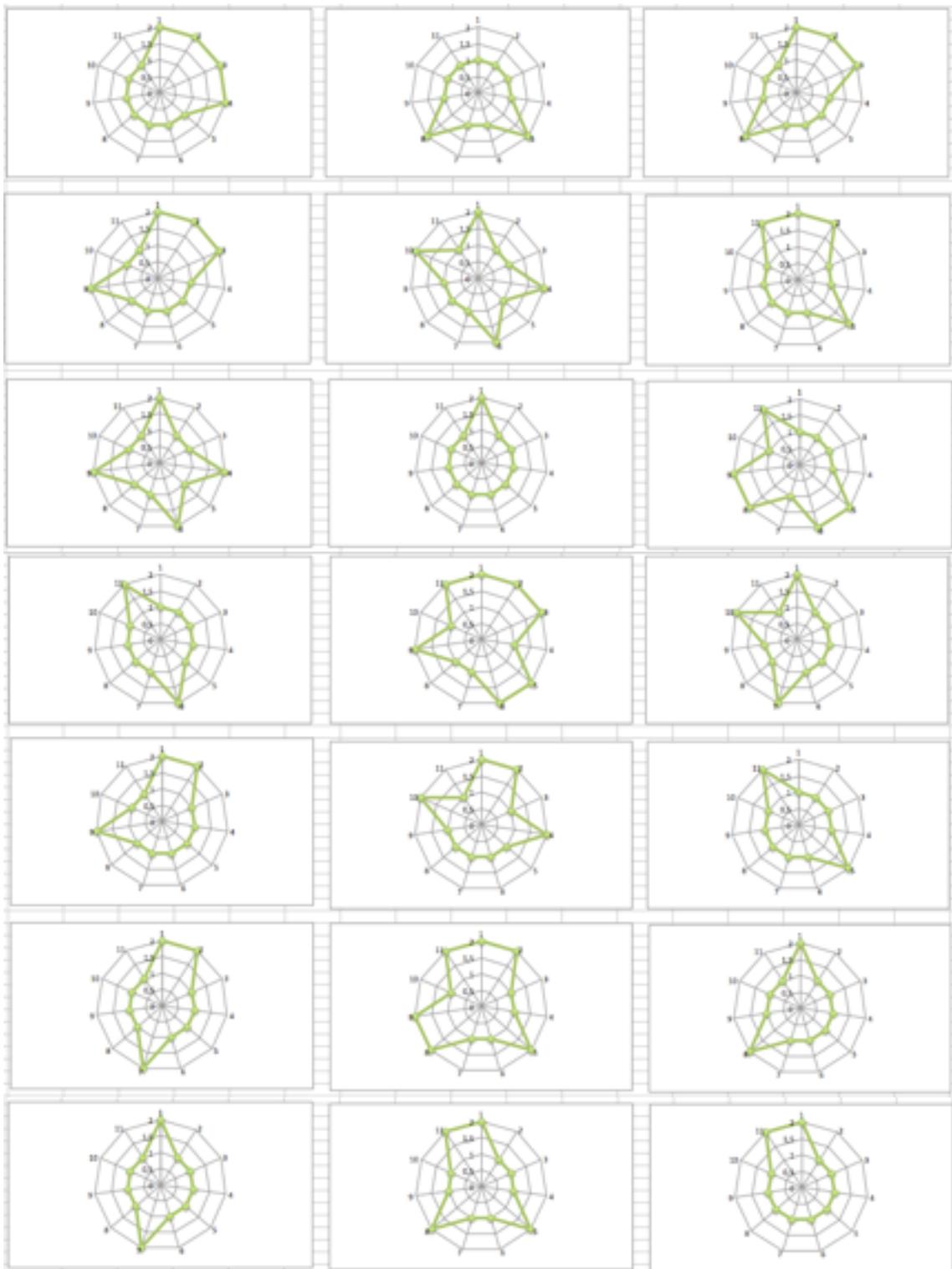


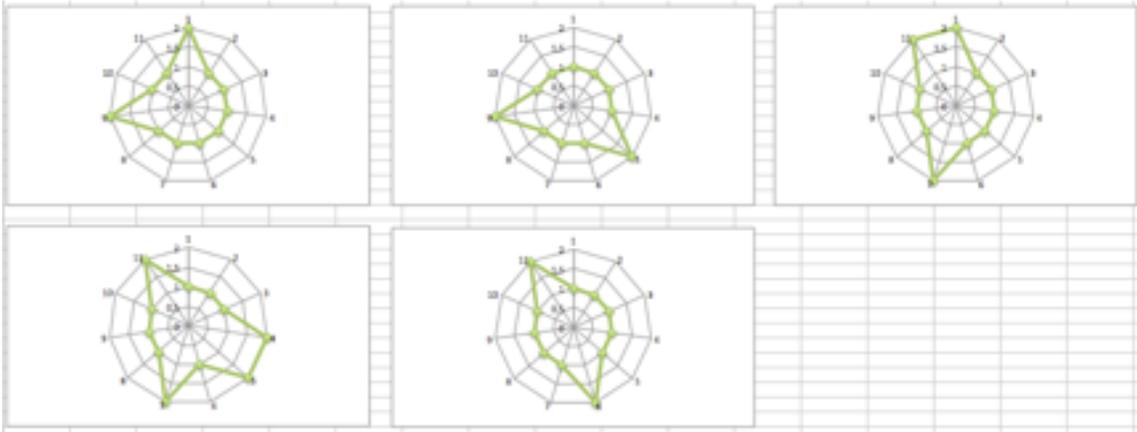
ANEXO VII. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIONES 1 Y 2



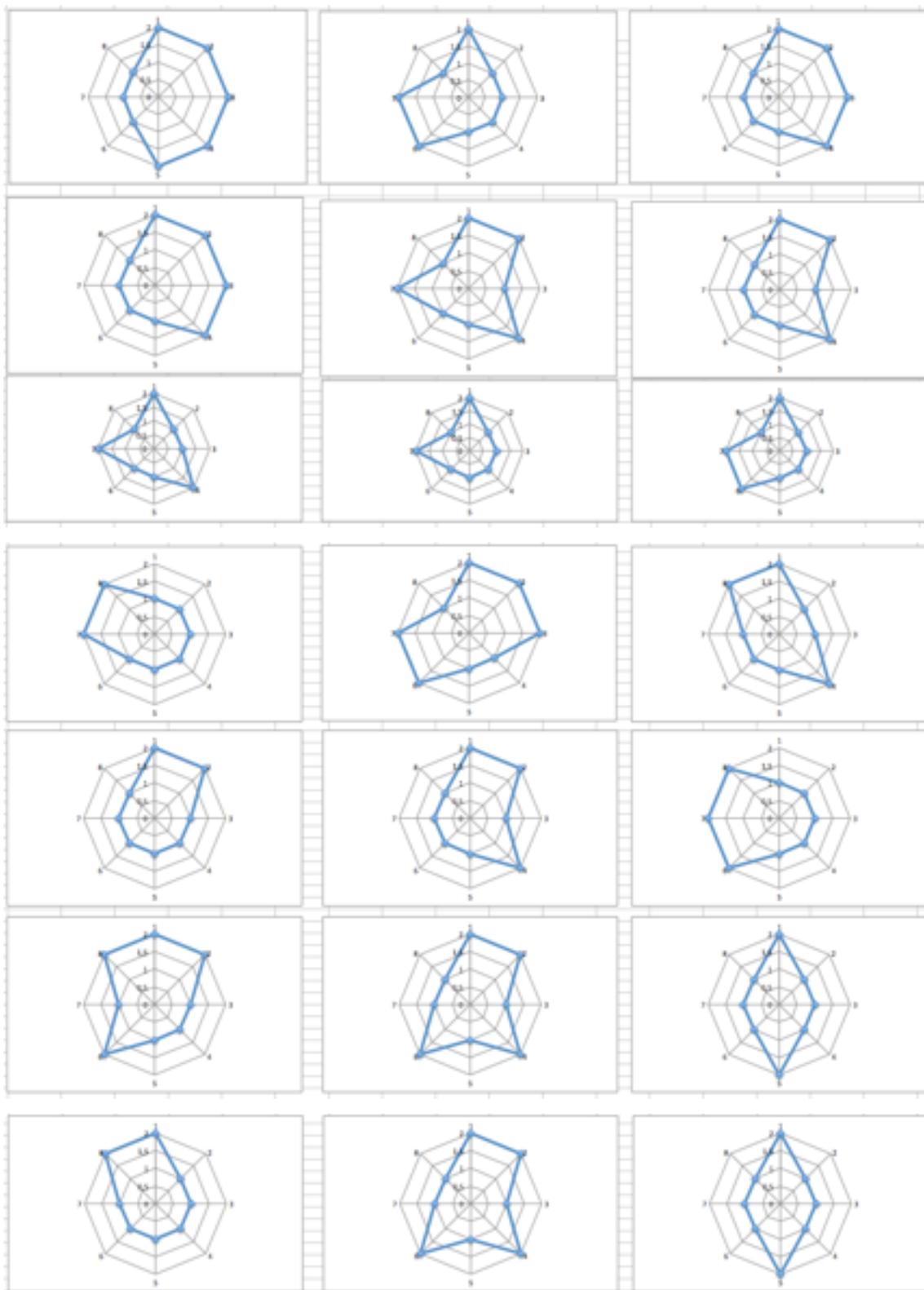


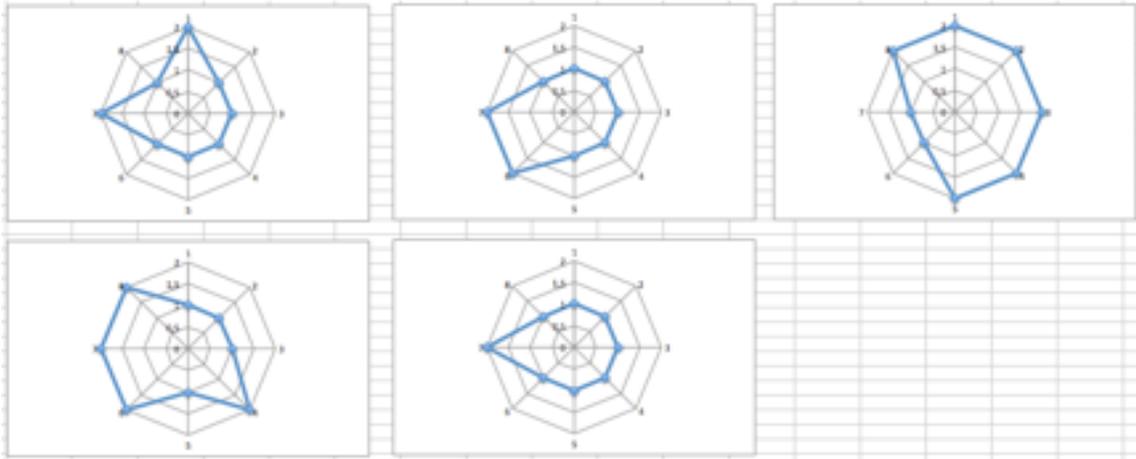
ANEXO VIII. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIONES 3 Y 4



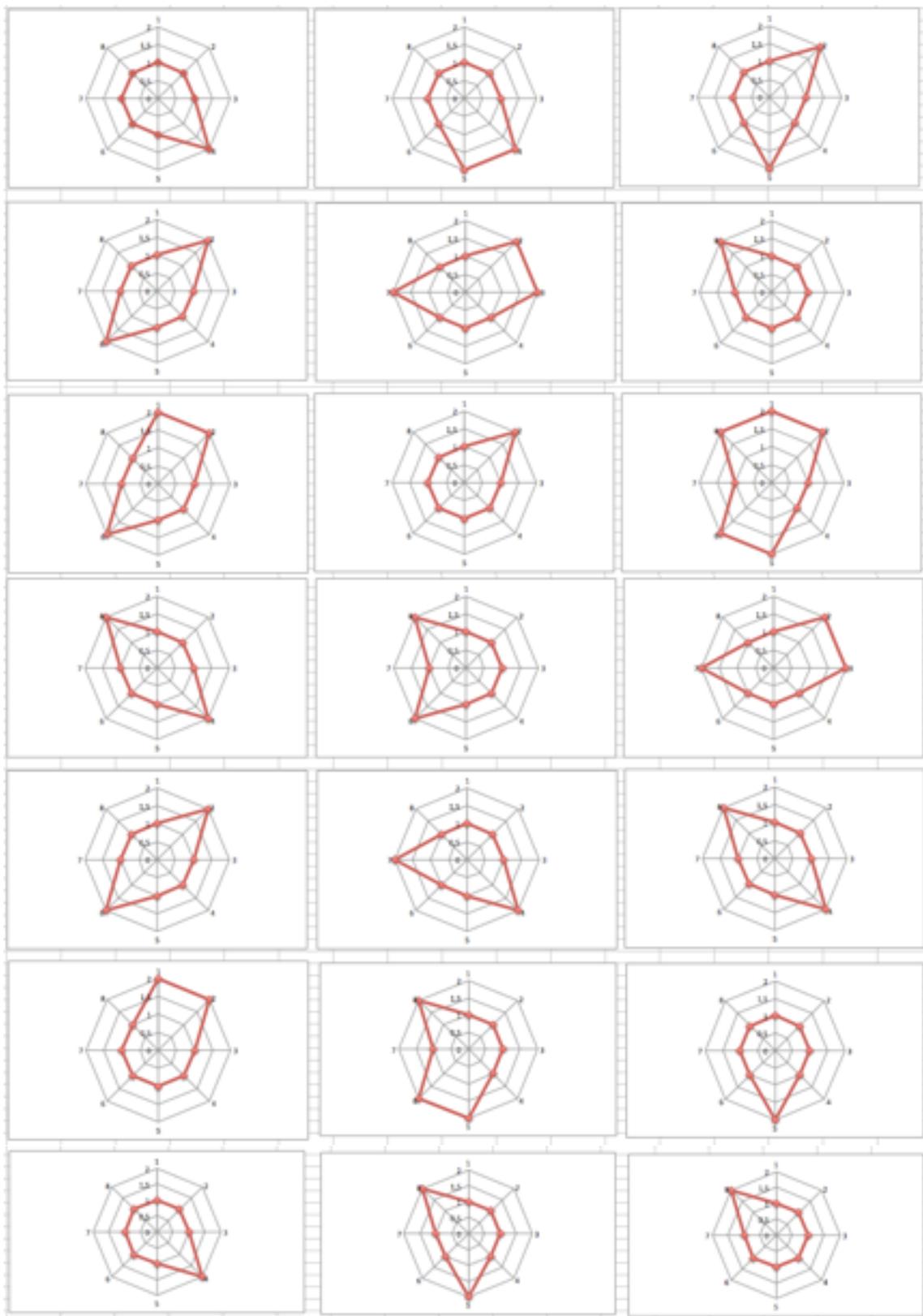


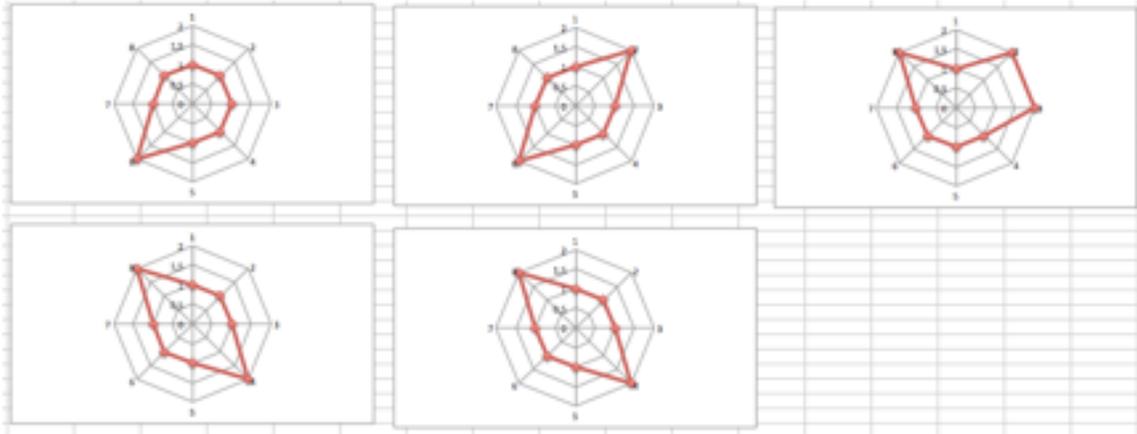
ANEXO IX. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIONES 1 Y 3





ANEXO X. GRÁFICOS RADIALES POR ALUMNO PARA CUESTIONES 2 Y 4





ANEXO XI. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIÓN 1

**Estadísticos descriptivos**

	Media	Desviación típica	N del análisis
REF01	,69231	,470679	26
REF02	,19231	,401918	26
REF03	,07692	,271746	26
REF04	,34615	,485165	26
REF05	,15385	,367946	26
REF06	,26923	,452344	26
REF07	,38462	,496139	26
REF08	,15385	,367946	26

**Matriz de correlaciones<sup>a</sup>**

	REF01	REF02	REF03	REF04	REF05	REF06	REF07	REF08	
Corr.	REF01	1,000	,325	,192	,310	,053	-,347	-,329	-,640
	REF02	,325	1,000	,592	,465	,062	-,076	-,386	-,208
	REF03	,192	,592	1,000	,397	,277	-,175	-,228	-,123
	REF04	,310	,465	,397	1,000	,138	-,259	-,409	-,086
	REF05	,053	,062	,277	,138	1,000	-,259	-,337	-,182
	REF06	-,347	-,076	-,175	-,259	-,259	1,000	,411	,222
	REF07	-,329	-,386	-,228	-,409	-,337	,411	1,000	,101
	REF08	-,640	-,208	-,123	-,086	-,182	,222	,101	1,000
Sig.	REF01		,052	,173	,062	,398	,041	,050	,000
	REF02	,052		,001	,008	,381	,356	,026	,154
	REF03	,173	,001		,022	,085	,196	,131	,275
	REF04	,062	,008	,022		,251	,100	,019	,338
	REF05	,398	,381	,085	,251		,101	,046	,187
	REF06	,041	,356	,196	,100	,101		,018	,138
	REF07	,050	,026	,131	,019	,046	,018		,312
	REF08	,000	,154	,275	,338	,187	,138	,312	

a. Determinante = ,095

**KMO y prueba de Bartlett**

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.	,609
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado
	gl
	Sig.
	50,677
	28
	,005

### Varianza total explicada

Componente	Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	2,945	36,817	36,817	2,076	25,955	25,955
2	1,334	16,670	53,487	1,722	21,525	47,481
3	1,156	14,450	67,937	1,637	20,456	67,937

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

### Matriz de componentes rotados<sup>a</sup>

	Componente		
	1	2	3
REF01	,231	-,873	-,135
REF02	,872	-,203	,034
REF03	,784	-,020	-,155
REF04	,696	-,109	-,254
REF05	,064	,049	-,764
REF06	-,026	,318	,713
REF07	-,399	,123	,657
REF08	-,016	,888	,076

### Matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en las componentes

	Componente		
	1	2	3
REF01	-,004	-,528	,070
REF02	,477	-,028	,213
REF03	,416	,109	,034
REF04	,337	,054	-,041
REF05	-,097	,151	-,548
REF06	,156	,104	,465
REF07	-,092	-,064	,385
REF08	,118	,574	-,076

- *REF1: Presencia de términos/expresiones relacionados con la proximidad o cercanía*
- *REF2: Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora a otras*
- *REF3: Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora al resto*
- *REF4: Presencia de aproximaciones por la derecha y por la izquierda*
- *REF5: Presencia de términos/expresiones relativos a la no alcanzabilidad*
- *REF6: El alumno usa términos/expresiones como sustituir en, la función vale...*
- *REF7: El alumno usa la variable dependiente sin necesidad / El alumno confunde variable dependiente e independiente*
- *REF8: El alumno hace referencia a algoritmos de cálculo de límites en la definición*

ANEXO XII. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIÓN 2

**Estadísticos descriptivos**

	Media	Desviación típica	N del análisis
SIG1	,1154	,32581	26
SIG3	,4231	,50383	26
SIG5	,1154	,32581	26
SIG6	,3077	,47068	26

**Matriz de correlaciones<sup>a</sup>**

		SIG1	SIG3	SIG5	SIG6
Correlación	SIG1	1,000	,422	-,130	-,241
	SIG3	,422	1,000	,422	-,571
	SIG5	-,130	,422	1,000	-,241
	SIG6	-,241	-,571	-,241	1,000
Sig. (Unilateral)	SIG1		,016	,263	,118
	SIG3	,016		,016	,001
	SIG5	,263	,016		,118
	SIG6	,118	,001	,118	

a. Determinante = ,392

**KMO y prueba de Bartlett**

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.	,504
Chi-cuadrado aproximado	21,410
Prueba de esfericidad de Bartlett	6
gl	6
Sig.	,002

**Varianza total explicada**

Componente	Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	1,976	49,388	49,388	1,976	49,388	49,388
2	1,130	28,261	77,649	1,130	28,261	77,649

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

**Matriz de componentes  
rotados<sup>a</sup>**

	Componente	
	1	2
SIG1	,517	,752
SIG3	,907	,000
SIG5	,517	-,752
SIG6	-,786	,000

**Matriz de coeficientes para  
el cálculo de las  
puntuaciones en las  
componentes**

	Componente	
	1	2
SIG1	,262	,665
SIG3	,459	,000
SIG5	,262	-,665
SIG6	-,398	,000

- *SIG1: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones*
- *SIG3: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones*
- *SIG5: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones*
- *SIG6: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación*

ANEXO XIII. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIÓN 3

**Estadísticos descriptivos**

	Media	Desviación típica	N del análisis
REF1	,7308	,45234	26
REF2	,3462	,48516	26
REF3	,1538	,36795	26
REF4	,1923	,40192	26
REF6	,3462	,48516	26
REF7	,2308	,42967	26
REF8	,1923	,40192	26

**Matriz de correlaciones<sup>a</sup>**

		REF1	REF2	REF3	REF4	REF6	REF7	REF8
Correlación	REF1	1,000	,442	,259	,076	-,470	-,285	,076
	REF2	,442	1,000	,586	,055	-,020	-,207	-,150
	REF3	,259	,586	1,000	,062	-,086	,019	-,208
	REF4	,076	,055	,062	1,000	-,150	,196	,010
	REF6	-,470	-,020	-,086	-,150	1,000	-,015	-,150
	REF7	-,285	-,207	,019	,196	-,015	1,000	-,267
	REF8	,076	-,150	-,208	,010	-,150	-,267	1,000
	Sig. (Unilateral)	REF1		,012	,101	,356	,008	,079
REF2		,012		,001	,394	,462	,156	,232
REF3		,101	,001		,381	,338	,462	,154
REF4		,356	,394	,381		,232	,169	,482
REF6		,008	,462	,338	,232		,471	,232
REF7		,079	,156	,462	,169	,471		,093
REF8		,356	,232	,154	,482	,232	,093	

a. Determinante = ,260

**KMO y prueba de Bartlett**

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.	,524
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado
	29,414
	gl
	21
	Sig.
	,104

### Varianza total explicada

Componente	Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	2,052	29,309	29,309	1,851	26,440	26,440
2	1,481	21,150	50,459	1,553	22,179	48,619
3	1,272	18,176	68,634	1,401	20,015	68,634

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

### Matriz de componentes rotados<sup>a</sup>

	Componente		
	1	2	3
REF1	,453	,670	-,298
REF2	,863	,107	-,176
REF3	,829	,062	,101
REF4	,015	,470	,557
REF6	-,003	-,835	-,065
REF7	-,104	-,085	,851
REF8	-,452	,404	-,482

- *REF1: Presencia de términos/expresiones relacionados con la proximidad o cercanía*
- *REF2: Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora a otras*
- *REF3: Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora al resto*
- *REF4: Presencia de aproximaciones por la derecha y por la izquierda*
- *REF6: El alumno usa términos/expresiones como sustituir en, la función vale...*
- *REF7: El alumno usa la variable dependiente sin necesidad / El alumno confunde variable dependiente e independiente*
- *REF8: El alumno hace referencia a algoritmos de cálculo de límites en la definición*

ANEXO XIV. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIÓN 4

**Estadísticos descriptivos**

	Media	Desviación típica	N del análisis
SIG8	,2308	,42967	26
SIG9	,3077	,47068	26
SIG11	,1154	,32581	26
SIG12	,4231	,50383	26

**Matriz de correlaciones<sup>a</sup>**

		SIG8	SIG9	SIG11	SIG12
Correlación	SIG8	1,000	,030	-,198	,085
	SIG9	,030	1,000	-,241	-,065
	SIG11	-,198	-,241	1,000	-,309
	SIG12	,085	-,065	-,309	1,000
Sig. (Unilateral)	SIG8		,441	,166	,339
	SIG9	,441		,118	,376
	SIG11	,166	,118		,062
	SIG12	,339	,376	,062	

a. Determinante = ,799

**KMO y prueba de Bartlett**

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.	,465
Prueba de esfericidad de Chi-cuadrado aproximado	5,117
Bartlett	gl
	6
	Sig.
	,529

**Varianza total explicada**

Componente	Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	1,455	36,385	36,385	1,404	35,106	35,106
2	1,065	26,617	63,002	1,116	27,896	63,002

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

**Matriz de componentes  
rotados<sup>a</sup>**

	Componente	
	1	2
SIG8	,503	,086
SIG9	,055	,929
SIG11	-,744	-,380
SIG12	,771	-,319

- *SIG8: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Tabular con 1 aproximación*
- *SIG9: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones*
- *SIG11: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones*
- *SIG12: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación*

ANEXO XV. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIONES 1-2

**Estadísticos descriptivos**

	Media	Desviación típica	N del análisis
REF1	,6923	,47068	26
REF2	,1923	,40192	26
REF3	,0769	,27175	26
REF4	,3462	,48516	26
REF5	,1538	,36795	26
REF6	,2692	,45234	26
REF7	,3846	,49614	26
REF8	,1538	,36795	26
SIG1	,1154	,32581	26
SIG3	,4231	,50383	26
SIG5	,1154	,32581	26
SIG6	,3077	,47068	26

**Matriz de correlaciones<sup>a</sup>**

	REF1	REF2	REF3	REF4	REF5	REF6	REF7	REF8	SIG1	SIG3	SIG5	SIG6	
C	REF1	1,000	,325	,192	,310	,053	-,347	-,329	-,640	-,020	,065	-,020	-,278
	REF2	,325	1,000	,592	,465	,062	-,076	-,386	-,208	-,176	,175	,435	-,325
	REF3	,192	,592	1,000	,397	,277	-,175	-,228	-,123	-,104	,337	,348	-,192
	REF4	,310	,465	,397	1,000	,138	-,259	-,409	-,086	-,010	,195	,243	-,310
	REF5	,053	,062	,277	,138	1,000	-,259	-,337	-,182	-,154	-,149	,180	-,053
	REF6	-,347	-,076	-,175	-,259	-,259	1,000	,411	,222	,324	,007	-,219	,159
	REF7	-,329	-,386	-,228	-,409	-,337	,411	1,000	,101	,209	-,037	-,286	,329
	REF8	-,640	-,208	-,123	-,086	-,182	,222	,101	1,000	,180	,066	,180	,178
	SIG1	-,020	-,176	-,104	-,010	-,154	,324	,209	,180	1,000	,422	-,130	-,241
	SIG3	,065	,175	,337	,195	-,149	,007	-,037	,066	,422	1,000	,422	-,571
	SIG5	-,020	,435	,348	,243	,180	-,219	-,286	,180	-,130	,422	1,000	-,241
	SIG6	-,278	-,325	-,192	-,310	-,053	,159	,329	,178	-,241	-,571	-,241	1,000
S	REF1		,052	,173	,062	,398	,041	,050	,000	,461	,376	,461	,085
	REF2	,052		,001	,008	,381	,356	,026	,154	,195	,197	,013	,052
	REF3	,173	,001		,022	,085	,196	,131	,275	,306	,046	,041	,173
	REF4	,062	,008	,022		,251	,100	,019	,338	,481	,170	,116	,062
	REF5	,398	,381	,085	,251		,101	,046	,187	,226	,233	,190	,398
	REF6	,041	,356	,196	,100	,101		,018	,138	,053	,487	,141	,219
	REF7	,050	,026	,131	,019	,046	,018		,312	,152	,429	,079	,050
	REF8	,000	,154	,275	,338	,187	,138	,312		,190	,374	,190	,193

SIG1	,461	,195	,306	,481	,226	,053	,152	,190		,016	,263	,118
SIG3	,376	,197	,046	,170	,233	,487	,429	,374	,016		,016	,001
SIG5	,461	,013	,041	,116	,190	,141	,079	,190	,263	,016		,118
SIG6	,085	,052	,173	,062	,398	,219	,050	,193	,118	,001	,118	

a. Determinante = ,010

### KMO y prueba de Bartlett

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.	,535
Chi-cuadrado aproximado	93,151
Prueba de esfericidad de Bartlett	66
gl	66
Sig.	,016

### Varianza total explicada

Componente	Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	3,467	28,890	28,890	2,347	19,558	19,558
2	2,022	16,847	45,737	1,947	16,228	35,786
3	1,533	12,776	58,512	1,935	16,124	51,910
4	1,061	8,841	67,354	1,853	15,444	67,354

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

### Matriz de componentes rotados<sup>a</sup>

	Componente			
	1	2	3	4
REF1	,172	-,188	,150	-,844
REF2	,879	-,032	,035	-,221
REF3	,801	-,098	,063	-,064
REF4	,536	-,283	,222	-,195
REF5	,075	-,647	-,148	,011
REF6	-,023	,767	,008	,227
REF7	-,284	,710	-,109	,148
REF8	-,059	,078	,084	,872
SIG1	-,251	,341	,711	,054
SIG3	,295	,066	,830	,115
SIG5	,580	-,356	,233	,387
SIG6	-,199	,237	-,754	,227

**Matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en las componentes**

	Componente			
	1	2	3	4
REF1	-,013	,019	,065	-,461
REF2	,475	,219	-,127	-,084
REF3	,417	,134	-,092	,013
REF4	,189	-,045	,054	-,051
REF5	-,089	-,398	-,052	,094
REF6	,182	,467	-,043	,031
REF7	,036	,386	-,062	-,021
REF8	,013	-,083	,056	,498
SIG1	-,177	,108	,422	-,022
SIG3	,049	,043	,417	,077
SIG5	,222	-,160	,061	,302
SIG6	,082	,129	-,410	,088

- *REF1: Presencia de términos/expresiones relacionados con la proximidad o cercanía*
- *REF2: Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora a otras*
- *REF3: Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora al resto*
- *REF4: Presencia de aproximaciones por la derecha y por la izquierda*
- *REF5: Presencia de términos/expresiones relativos a la no alcanzabilidad*
- *REF6: El alumno usa términos/expresiones como sustituir en, la función vale...*
- *REF7: El alumno usa la variable dependiente sin necesidad / El alumno confunde variable dependiente e independiente*
- *REF8: El alumno hace referencia a algoritmos de cálculo de límites en la definición*
- *SIG1: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones*
- *SIG3: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones*
- *SIG5: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones*
- *SIG6: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación*

ANEXO XVI. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIONES 3-4

**Estadísticos descriptivos**

	Media	Desviación típica	N del análisis
REF1	,7308	,45234	26
REF2	,3462	,48516	26
REF3	,1538	,36795	26
REF4	,1923	,40192	26
REF6	,3462	,48516	26
REF7	,2308	,42967	26
REF8	,1923	,40192	26
SIG8	,2308	,42967	26
SIG9	,3077	,47068	26
SIG11	,1154	,32581	26
SIG12	,4231	,50383	26

**Matriz de correlaciones<sup>a</sup>**

	REF1	REF2	REF3	REF4	REF6	REF7	REF8	SIG8	SIG9	SIG11	SIG12
REF1	1,000	,442	,259	,076	-,470	-,285	,076	-,079	,029	,219	-,358
REF2	,442	1,000	,586	,055	-,020	-,207	-,150	-,015	,216	-,010	-,132
REF3	,259	,586	1,000	,062	-,086	,019	-,208	,019	,178	-,154	-,149
REF4	,076	,055	,062	1,000	-,150	,196	,010	-,267	-,114	,435	-,220
REF6	-,470	-,020	-,086	-,150	1,000	-,015	-,150	,369	,216	-,263	,522
C REF7	-,285	-,207	,019	,196	-,015	1,000	-,267	-,083	,228	,088	,270
REF8	,076	-,150	-,208	,010	-,150	-,267	1,000	-,267	-,325	,129	-,023
SIG8	-,079	-,015	,019	-,267	,369	-,083	-,267	1,000	,030	-,198	,085
SIG9	,029	,216	,178	-,114	,216	,228	-,325	,030	1,000	-,241	-,065
SIG11	,219	-,010	-,154	,435	-,263	,088	,129	-,198	-,241	1,000	-,309
SIG12	-,358	-,132	-,149	-,220	,522	,270	-,023	,085	-,065	-,309	1,000
REF1		,012	,101	,356	,008	,079	,356	,350	,444	,141	,036
REF2	,012		,001	,394	,462	,156	,232	,471	,145	,481	,260
REF3	,101	,001		,381	,338	,462	,154	,462	,193	,226	,233
REF4	,356	,394	,381		,232	,169	,482	,093	,290	,013	,140
REF6	,008	,462	,338	,232		,471	,232	,032	,145	,097	,003
S REF7	,079	,156	,462	,169	,471		,093	,343	,131	,335	,091
REF8	,356	,232	,154	,482	,232	,093		,093	,052	,265	,456
SIG8	,350	,471	,462	,093	,032	,343	,093		,441	,166	,339
SIG9	,444	,145	,193	,290	,145	,131	,052	,441		,118	,376
SIG11	,141	,481	,226	,013	,097	,335	,265	,166	,118		,062
SIG12	,036	,260	,233	,140	,003	,091	,456	,339	,376	,062	

a. Determinante = ,041

### KMO y prueba de Bartlett

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.		,432
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	65,502
	gl	55
	Sig.	,157

ANEXO XVII. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIONES 1-3

**Estadísticos descriptivos**

	Media	Desviación típica	N del análisis
REF01	,80769	,401918	26
REF02	,46154	,508391	26
REF03	,19231	,401918	26
REF04	,46154	,508391	26
REF05	,15385	,367946	26
REF06	,34615	,485165	26
REF07	,46154	,508391	26
REF08	,26923	,452344	26

**Matriz de correlaciones<sup>a</sup>**

	REF01	REF02	REF03	REF04	REF05	REF06	REF07	REF08
REF01	1,000	,452	,238	,256	,208	-,260	-,527	-,364
REF02	,452	1,000	,527	,536	,033	-,025	-,548	-,214
REF03	,238	,527	1,000	,331	,333	-,150	-,256	-,076
REF04	,256	,536	,331	1,000	,033	-,187	-,393	-,040
REF05	,208	,033	,333	,033	1,000	-,310	-,395	-,018
REF06	-,260	-,025	-,150	-,187	-,310	1,000	,299	,105
REF07	-,527	-,548	-,256	-,393	-,395	,299	1,000	-,040
REF08	-,364	-,214	-,076	-,040	-,018	,105	-,040	1,000
REF01		,010	,121	,103	,154	,099	,003	,034
REF02	,010		,003	,002	,437	,452	,002	,147
REF03	,121	,003		,049	,048	,232	,103	,356
REF04	,103	,002	,049		,437	,180	,024	,423
REF05	,154	,437	,048	,437		,061	,023	,464
REF06	,099	,452	,232	,180	,061		,069	,305
REF07	,003	,002	,103	,024	,023	,069		,423
REF08	,034	,147	,356	,423	,464	,305	,423	

a. Determinante = ,087

**KMO y prueba de Bartlett**

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.	,561
Chi-cuadrado aproximado	52,444
Prueba de esfericidad de Bartlett	gl
	28
	Sig.
	,003

**Varianza total explicada**

Componente	Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	2,929	36,613	36,613	2,315	28,940	28,940
2	1,274	15,929	52,543	1,649	20,609	49,549
3	1,144	14,300	66,843	1,383	17,294	66,843

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

**Matriz de componentes rotados<sup>a</sup>**

	Componente		
	1	2	3
REF01	,398	,331	-,640
REF02	,872	-,058	-,283
REF03	,634	,241	-,015
REF04	,769	,000	-,032
REF05	,079	,832	,061
REF06	-,011	-,721	,189
REF07	-,628	-,513	,073
REF08	,054	,044	,920

**Matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en las componentes**

	Componente		
	1	2	3
REF01	,045	,111	-,423
REF02	,414	-,209	-,089
REF03	,283	,056	,109
REF04	,391	-,133	,099
REF05	-,091	,561	,123
REF06	,148	-,478	,096
REF07	-,225	-,239	-,082
REF08	,170	,089	,749

- *REF1: Presencia de términos/expresiones relacionados con la proximidad o cercanía*
- *REF2: Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora a otras*
- *REF3: Presencia de términos/expresiones que indican que el alumno entiende tendencia como una aproximación que mejora al resto*
- *REF4: Presencia de aproximaciones por la derecha y por la izquierda*
- *REF5: Presencia de términos/expresiones relativos a la no alcanzabilidad*
- *REF6: El alumno usa términos/expresiones como sustituir en, la función vale...*
- *REF7: El alumno usa la variable dependiente sin necesidad / El alumno confunde variable dependiente e independiente*
- *REF8: El alumno hace referencia a algoritmos de cálculo de límites en la definición*

ANEXO XVIII. ANÁLISIS FACTORIAL CUESTIONES 2-4

**Estadísticos descriptivos**

	Media	Desviación típica	N del análisis
SIG1	,1154	,32581	26
SIG3	,4231	,50383	26
SIG5	,1154	,32581	26
SIG6	,3077	,47068	26
SIG8	,2308	,42967	26
SIG9	,3077	,47068	26
SIG11	,1154	,32581	26
SIG12	,4231	,50383	26

**Matriz de correlaciones<sup>a</sup>**

	SIG1	SIG3	SIG5	SIG6	SIG8	SIG9	SIG11	SIG12	
Correlación	SIG1	1,000	,422	-,130	-,241	,088	,281	-,130	-,066
	SIG3	,422	1,000	,422	-,571	-,099	,272	,178	-,418
	SIG5	-,130	,422	1,000	-,241	-,198	-,241	,623	-,066
	SIG6	-,241	-,571	-,241	1,000	-,167	-,444	,020	,104
	SIG8	,088	-,099	-,198	-,167	1,000	,030	-,198	,085
	SIG9	,281	,272	-,241	-,444	,030	1,000	-,241	-,065
	SIG11	-,130	,178	,623	,020	-,198	-,241	1,000	-,309
	SIG12	-,066	-,418	-,066	,104	,085	-,065	-,309	1,000
	Sig. (Unilateral)	SIG1		,016	,263	,118	,335	,082	,263
SIG3		,016		,016	,001	,314	,089	,192	,017
SIG5		,263	,016		,118	,166	,118	,000	,375
SIG6		,118	,001	,118		,207	,011	,461	,307
SIG8		,335	,314	,166	,207		,441	,166	,339
SIG9		,082	,089	,118	,011	,441		,118	,376
SIG11		,263	,192	,000	,461	,166	,118		,062
SIG12		,375	,017	,375	,307	,339	,376	,062	

a. Determinante = ,077

**KMO y prueba de Bartlett**

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.	,471
Prueba de esfericidad de Chi-cuadrado aproximado	55,145
Bartlett	gl
	28
	Sig.
	,002

### Varianza total explicada

Componente	Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	2,324	29,046	29,046	2,216	27,700	27,700
2	2,011	25,133	54,178	1,895	23,686	51,386
3	1,019	12,733	66,912	1,242	15,526	66,912

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

### Matriz de componentes rotados<sup>a</sup>

	Componente		
	1	2	3
SIG1	,631	-,230	-,093
SIG3	,774	,390	-,265
SIG5	,058	,931	-,030
SIG6	-,793	-,274	-,278
SIG8	,164	-,085	,714
SIG9	,676	-,362	-,013
SIG11	-,123	,769	-,334
SIG12	-,296	-,139	,681

### Matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en las componentes

	Componente		
	1	2	3
SIG1	,289	-,165	-,111
SIG3	,335	,155	-,132
SIG5	,006	,529	,164
SIG6	-,362	-,198	-,323
SIG8	,096	,092	,615
SIG9	,314	-,226	-,066
SIG11	-,082	,378	-,141
SIG12	-,112	,065	,562

- *SIG1: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Tabular con 2 aproximaciones*
- *SIG3: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones*

- *SIG5: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones*
- *SIG6: Discriminan 2 variables en convergencia en 1 variable y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación*
- *SIG8: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Tabular con 1 aproximación*
- *SIG9: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Gráfico con 2 aproximaciones*
- *SIG11: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 2 aproximaciones*
- *SIG 12: Discriminan 2 variables en convergencia en 2 variables y usan el Sistema de Representación Simbólico con 1 aproximación*

ANEXO XIX. MATRIZ DE COMPONENTES Y SINGULARIDADES

ALUMNO	CUESTIONES 1-2						CUESTIONES 1-3						CUESTIONES 2-4				CUESTIÓN 1				CUESTIÓN 2				SINGULARIDADES					
	C12C1	C12C2	C12C3	C12C4	C13C1	C13C2	C13C3	C24C1	C24C2	C24C3	C1C1	C1C2	C1C3	C2C1	C2C2	SING1	SING2	SING3	SING4	SING5	ALUMINO									
	Mejor aproximación doble SRS2	Valor/Sus tituir SRT2	SRG2 y SRS2	Cálculo de límites y SRS1	Mejor aproximación doble	No alcanzabilidad	Cálculo de límites	SRT2 y SRG2	SRS2	SRT1 y SRS1	Mejor aproximación doble	Cálculo de límites	Valor/Sus tituir	SRG2 y SRS2/SRT2	SRT2	Usan una única variable en preg 2	D21SR T1	D21SR G1	D22SR T2	D22SR G1										
1	-0,38162	-1,47687	-0,99242	-0,36013	1,59852	-0,1284	-1,0511	-0,63949	-1,09212	-0,18781	-0,19552	-1,92447	-1,15626	0	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	NO		1								
2	-0,0546	1,51	-1,18102	-0,48622	-0,84791	-0,71855	-0,82764	-0,42498	0,33879	-0,46057	-0,61594	1,45361	-1,15626	0	NO	NO	NO	NO	NO	NO	2									
3	-0,2171	-0,58451	0,84818	-0,65228	1,47781	0,07454	0,60634	0,30174	0,76258	0,07471	-0,60496	-0,43544	0,60054	0	NO	NO	NO	NO	NO	NO	3									
4	2,49942	0,45223	0,19279	-0,81084	1,47781	0,07454	0,46396	1,04974	-0,39207	2,79278	-0,27204	0,21806	0,60054	0	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO	4									
5	1,25661	-0,43673	0,60793	0,17113	0,33166	-0,53616	-0,89654	0,14924	2,87032	-0,59834	0,56817	-0,78466	1,40386	-2,04124	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO	5									
6	-0,31518	-0,66953	0,0197	-0,80485	0,7733	-0,06551	-0,73484	-0,50607	0,09125	0,07471	-0,60496	-0,43544	-0,31083	0	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO	6									
7	-0,68586	0,52374	2,01977	-0,76074	-0,48192	-0,12473	-0,72147	1,93549	-0,89896	-0,11016	-0,73452	0,34078	1,40386	2,04124	SÍ	NO	NO	NO	SÍ	NO	7									
8	-0,53402	0,2866	0,61219	-0,59033	-1,25081	0,1363	-0,91647	0,38287	0,08724	-0,80436	-0,84524	0,42574	0,60054	0	NO	NO	NO	NO	NO	SÍ	8									
9	-0,67343	1,65075	1,81404	-0,58782	-0,94665	-0,84791	-0,71855	1,93587	-0,55599	-0,46057	-0,61594	1,45361	1,40386	2,04124	NO	NO	NO	NO	NO	NO	9									
10	-0,39406	0,21032	-1,07079	1,77749	-0,98628	0,05724	1,79096	-1,27419	-0,51102	-0,47524	1,8351	0,06944	-1,15626	0	NO	NO	NO	NO	NO	NO	10									
11	-0,70525	-0,57597	-0,0917	-0,70072	0,57143	-1,11929	-0,62274	0,16079	-0,57056	0,57007	-0,61949	-0,71567	-0,35048	0	NO	NO	NO	NO	NO	NO	11									
12	0,52799	-1,3411	1,05095	2,60754	0,33641	0,54271	1,09533	0,14924	2,87032	-0,59834	0,40383	2,07538	-0,79174	-2,04124	NO	NO	NO	NO	NO	NO	12									
13	-0,60718	-0,49095	0,73678	-0,54815	0,00441	0,19553	-0,92984	1,04974	-0,39207	-0,80797	-0,61949	-0,71567	-0,35048	0,60054	NO	NO	NO	NO	NO	NO	13									
14	-0,53026	-0,301	-0,9621	-0,51283	0,7733	-0,06551	-0,73484	-1,30208	0,52	-1,52595	-0,61949	-0,71567	-0,35048	0	NO	NO	NO	NO	NO	NO	14									
15	0,00844	1,24378	-1,16512	1,84627	-0,68212	-0,92697	1,98888	-1,27419	-0,51102	0,02423	-0,13145	2,0644	1,09731	-1,15626	NO	NO	NO	NO	NO	NO	15									
16	-0,68355	0,60698	1,95453	1,78685	0,68526	-0,59189	0,92318	1,26863	-0,41965	-1,00936	0,05341	2,19396	0,32109	2,04124	NO	NO	NO	NO	NO	NO	16									
17	0,86656	-0,12495	-0,29602	-1,01289	1,07746	-1,04972	-0,53692	0,38426	-0,35605	2,00098	1,26238	-0,67395	0,09441	-0,31083	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO	17									
18	-0,94669	-1,65828	-0,23342	-0,4439	-1,05606	2,13094	-0,41921	-0,05952	-0,00521	1,02426	-0,88201	-0,30624	-1,83951	0	SÍ	NO	NO	NO	NO	NO	18									
19	-0,53026	-0,301	-0,9621	-0,51283	-0,43248	0,80375	0,90033	-1,0511	-0,63949	-1,09212	-0,61949	-0,71567	-0,35048	0	NO	NO	NO	NO	NO	NO	19									
20	1,26907	0,90851	-0,39035	-0,94411	1,07746	-1,04972	-0,53692	-0,28261	0,12326	2,14062	1,60617	-0,44465	1,12228	-0,31083	NO	NO	NO	NO	NO	NO	20									
21	-0,91845	-1,69865	-0,37096	0,535	-1,05606	2,13094	-0,41921	-0,50607	-0,09125	0,7097	-0,87311	0,81468	-1,98836	0	NO	NO	NO	NO	NO	NO	21									
22	-0,63209	0,20157	-0,21629	-0,7429	-1,25081	0,1363	-0,91647	0,38388	-0,69902	-0,54629	-0,80436	0,84524	0,42574	-0,31083	SÍ	NO	SÍ	NO	NO	NO	22									
23	-0,10328	1,27968	0,38032	0,45735	-1,0588	-1,12376	0,33378	1,04974	-0,39207	-0,80797	-0,45167	0,50498	1,30476	0,60054	NO	NO	NO	NO	NO	NO	23									
24	2,94003	-1,12044	0,23794	0,37331	1,6076	1,79532	1,5267	0,17713	1,8393	0,95184	2,53026	0,13739	-1,27097	-2,04124	NO	NO	NO	NO	NO	NO	24									
25	-0,02636	1,46963	-1,31856	0,49267	0,06678	-1,188	2,18388	-1,27419	-0,51102	0,02423	-0,45167	0,50498	1,30476	-1,15626	NO	NO	NO	NO	NO	NO	25									
26	-0,42887	0,43617	-1,22423	0,42389	-1,36297	-0,13955	0,13586	-1,27419	-0,51102	0,02423	-0,79546	0,27568	0,2769	-1,15626	NO	NO	NO	NO	NO	NO	26									

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azcárate, C. y Camacho, M. (2003) Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2*, pp. 135- 149.
- Azcárate, C., Camacho M. y Sierra M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: Investigación en didáctica del análisis. En T. Ortega (Coord.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 283-293). Valladolid: SEIEM.
- Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. En T. Ortega (Coord.) *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 167-184). Valladolid: SEIEM..
- Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula, 10*, 119-135.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 4(3), 219-236.
- Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 12(1), 145-168.
- Blok J. V. (2014). On the use of questionnaires in semantic fieldwork: A case study in modality. In A. Belkadi, K. Chatsiou, & K. Rowan (Eds.). *Proceedings of Conference on Language Documentation and Linguistic Theory, 4*. London: SOAS.
- Bokhari, M. A. & Yushau, B. (2006). Local  $(L, \varepsilon)$ -approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(5), 515-526.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico, (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- Claros, F.J. (2010). *Límite finito de sucesiones: Fenómenos que organiza*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). Research methods in education. Milton Park. Abingdon, Oxon, [England]: Routledge.
- Comrey, A. L. (1985). *Manual de análisis factorial*. Madrid: Cátedra.

- Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Tesis Doctoral. Grenoble: Universidad de Grenoble.
- Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 153-166). Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- Cottrill, J., Dubinsky, Ed., Schwingendorf, K., Thomas, K., Nichols D. & Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.
- Cubero, R. (1996). *Concepciones de los alumnos y cambio conceptual: un estudio longitudinal sobre el conocimiento del proceso digestivo en educación primaria*. Tesis Doctoral. Sevilla: Universidad de Sevilla.
- Da Ponte, J.P. (1999). Las creencias y concepciones de maestros como un tema fundamental en formación de maestros. En K. Krainer y F. Goffree (Eds.). *On research in teacher education* (pp 43-50). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Davis, R.B. & Vinner, S. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconceptions Stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.
- Dubinsky, Ed. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 95-126). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. *Advanced mathematical thinking*, 25-41.
- Edwards, B.S., Dubinsky, Ed. & McDonald, M.A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 15-25.
- Estrella, M. (2013). *Unidad Didáctica: Límite finito de una función en un punto y Continuidad*. Memoria final del Máster universitario de profesorado de educación secundaria obligatoria, bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas (especialidad de matemáticas). Granada: Universidad de Granada.
- Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio*. Trabajo de fin de máster no publicado, Universidad de Granada, España.
- Fernández-Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

- Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229 - 237). Jaén: SEIEM.
- Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J.F., y Rico, L. (2013). Análisis conceptual de términos específicos. Concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la RSME*, 16(1), 131-145.
- Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J.F., Rico, L., y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, 7(3), 117-131
- Frege, G. (1996a). Sobre sentido y referencia. En Mosterín J.(Ed.). *Escritos Filosóficos*. Barcelona: Crítica.
- Frege, G. (1996b). Función y concepto. En Mosterín J.(Ed.). *Escritos Filosóficos*. Barcelona: Crítica.
- Juter, K. (2007a). Students' Concept Development of Limits. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*. Working group 14, 2320-2329
- Juter, K. (2007b). Students' Conceptions of Limits: High Achievers versus Low Achievers. *The Montana Mathematics Enthusiast (TMME)*. 4(1), 53-65.
- Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19, 26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
- Lauten, A.D., Graham, K. & Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior* 13(2), 225-237.
- Moliner, M. (1998). *Diccionario del uso del español*. (2a Ed, Vol. 2). Madrid: Editorial Gredos.
- Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.
- Oxford University Press (2015). *Oxford Dictionaries*. Disponible en <http://oxforddictionaries.com/>. Consultado[24-04-2015].
- Real Academia Española [RAE] (2001). *Diccionario de la Lengua Española*. (22a Ed). Madrid. Disponible en: <http://www.rae.es/rae.html>. Consultado[24-04-2015]

- Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 219-231). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En Gómez,P. y Rico, L.(Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.*(pp. 179-193). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Rico, L. (2007). *Sistema de Significados de un Concepto en las Matemáticas Escolares*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada
- Romero, I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Romero, I. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. En N. Climent, L. C. Contreras, J. Carrillo (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-46). Huelva: SEIEM.
- Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics*, 22,1-36.
- Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, 7(4), 765-790.
- Tall D.O (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes, *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 170-176.
- Tall D.O. & Schwarzenberger R.L.E.(1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44- 49.
- Tall, D.O & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151- 169.
- Tall, D.O. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. in Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 495- 511.

- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.14(3), 293-305.
- Vinner, S & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*.20(4), 356-366.
- Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, 8(29), 9-19.
- Yela, M. (1997). *La técnica del análisis factorial*. Madrid: Biblioteca Nueva.
- Zaskis, R. & Applebaum M. (2007). Advancing mathematical thinking: Looking back at one problem. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*. Working group 14, 2389-2397